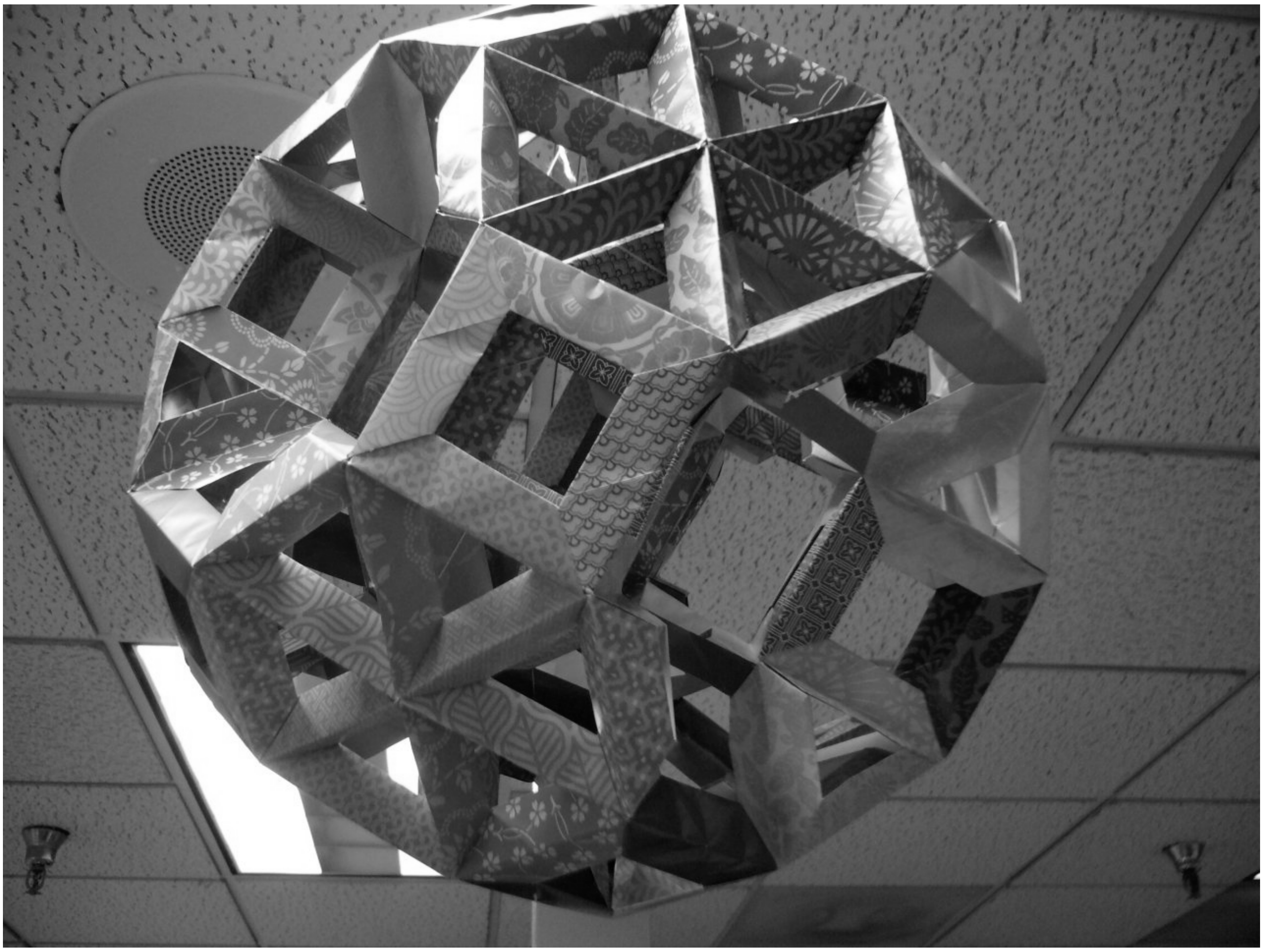
MATEMATICA C^3 -ALGEBRA 2

4 DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO



Ardonik, *easy-origami-fold-a-day-calendar-great-rhombicub octahedron*
http://www.flickr.com/photos/ardonik/2833120348

►1. Soluzioni della disequazione di secondo grado

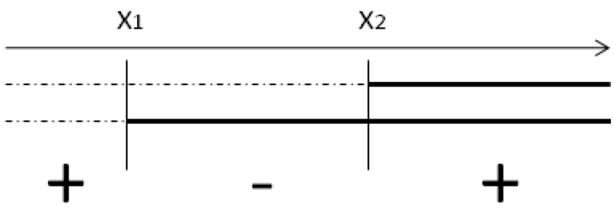
Una disequazione di secondo grado si presenta in una delle seguenti forme:

$$a\,x^2+b\,x+c>0\,;\ a\,x^2+b\,x+c\geq 0\,;\ a\,x^2+b\,x+c<0;\ a\,x^2+b\,x+c\leq 0$$

Per risolverla innanzitutto supponiamo che il coeficiente di x^2 sia positivo. Se così non fosse, basta cambiare segno a tutti i termini e quindi il verso della disequazione; per esempio, per risolvere la disequazione $-2\,x^2+3\,x-1>0$ si può risolvere la disequazione $2\,x^2-3\,x+1<0$.

Quindi si risolve l'equazione associata, cioè si sostiruisce il segno della disequazione con l'uguale. Possono presentarsi tre casi.

1. **L'equazione è spuria**: $a\,x^2+b\,x=0$. Questa equazione ammette sempre due radici reali e distinte, di cui una è sempre 0. Ricordiamo che l'equazione si risolve mettendo x a fattor comune $x(ax+b)=0$ e applicando la legge di annullamento del prodotto, da cui ricaviamo $x=0\ \vee\ ax+b=0\rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$. Chiamiamo le due radici x_1 e x_2. Analogamente a quanto fatto nelle disequazioni di primo rgado, poniamo separatamente ogni fattore maggiore di 0 e confrontiamo i segni dei singoli fattori. Le soluzioni saranno



   I. $x<x_1\vee x>x_2$ soluzioni esterne se la disequazione è $a\,x^2+b\,x>0$, analogamente $x\leq x_1\vee x\geq x_2$ se la disequazione è $a\,x^2+b\,x\geq 0$.

   II. $x_1<x<x_2$ soluzioni interne se la disequazione è $a\,x^2+b\,x<0$, analogamente $x_1\leq x\leq x_2$ se la disequazione è $a\,x^2+b\,x\leq 0$.

Esempi

- ■ $3x^2-2x>0$ soluzioni $x<0\vee x>\dfrac{2}{3}$
- ■ $5x^2+x\leq 0$ soluzioni $-\dfrac{1}{5}\leq x\leq 0$

2. **L'equazione è pura**: $ax^2+c=0$. Possono esserci due situazioni:

   I. c<0, in questo caso l'equazione ammette due radici opposte: $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$: si torna al caso precedente e si ha $x<x_1\vee x>x_2$ se la disequazione è $ax^2+c>0$ oppure $x<x_1<x_2$ se la disequazione è $ax^2+c<0$

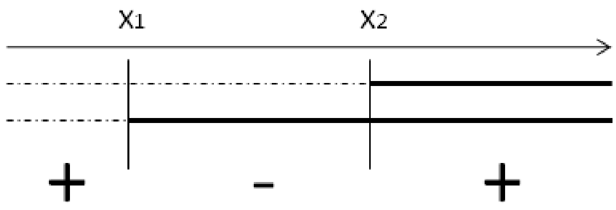
   II. c>0: l'equazione non ammette soluzioni reali; il binomio ax^2+c è la somma di un quadrato più un numero positivo, pertanto è sempre positivo. Di conseguenza la disequazione $ax^2+c>0$ avrà soluzioni per ogni x reale, mentre $ax^2+c<0$ non avrà nessuna soluzione reale.

Esempi

- ■ $x^2-4\geq 0$ soluzioni $x\leq -2\vee x\geq 2$
- ■ $x^2-9\leq 0$ soluzioni $-3\leq x\leq 3$
- ■ $x^2+4>0$ soluzioni $\forall\, x\in\mathbb{R}$
- ■ $x^2+9\leq 0$ soluzioni nessuna valore reale.

3. **L'equazione è completa**: $ax^2+bx+c=0$. Si calcola il valore del discriminante $\Delta=b^2-4ac$. A seconda del suo segno possono presentarsi tre casi:

   I. $\Delta>0$ l'equazione ammette due radici reali e distinte; il trinomio si scompone in $a(x-x_1)(x-x_2)$. Poiché abbiamo supposto a è positivo il segno del trinomio è dato da



Per cui la disequazione $ax^2+bx+c\geq 0$ è verificata per valori esterni alle soluzioni, cioè $x\leq x_1 \vee x\geq x_2$; mentre la disequazione $ax^2+bx+c\leq 0$ è verificata per valori interni alle soluzioni, cioè $x_1\leq x\leq x_2$.

Esempi

- $x^2-3x-4>0$; soluzioni dell'equazione associata $x_1=-1 \vee x_2=4$. Soluzioni della disequazione : $x<-1 \vee x>4$.
- $x^2-3x-4<0$, in questo caso le soluzioni della disequazione saranno $-1<x<4$.

II. $\Delta=0$ in questo caso le radici dell'equazione associata sono coincidenti $x_1=x_2$, pertanto il trinomio si scompone in $a(x-x_1)^2$. Poiché a è positivo e il quadrato è positivo o al più nullo si possono verificare quattro casi:

i. $a(x-x_1)^2>0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R} \wedge x\neq x_1$;
ii. $a(x-x_1)^2\geq 0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R}$;
iii. $a(x-x_1)^2<0$ non è mai verificata;
iv. $a(x-x_1)^2\geq 0$ è verificata solo per $x=x_1$;

Esempi

- $x^2-2x+1>0 \rightarrow (x-1)^2>0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R} \wedge x\neq 1$
- $4x^2-4x+1\geq 0 \rightarrow (2x-1)^2\geq 0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$
- $x^2+2x+1<0 \rightarrow (x-1)^2<0$ nessuna soluzione
- $4x^2+4x+1\leq 0 \rightarrow (2x+1)^2\leq 0$ unica soluzione $x=-\frac{1}{2}$.

III. $\Delta<0$ studiamo il segno che assume il trinomio in questo caso. Dobbiamo eseguire i seguenti passaggi: mettiamo il coefficiente *a* a fattore comune, aggiungendo e togliendo $\frac{b^2}{4a^2}$ si ha

$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$ Osserviamo che i primi tre termini costituiscono lo sviluppo del quadrato di un binomio, e riduciamo gli ultimi due allo stesso denominatore, si ha

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$. Studiamo ora il segno di questa espressione: a è sempre > 0, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ essendo un quadrato è sempre maggiore > 0; mentre $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=-\frac{\Delta}{4a^2}$ è sempre positivo perché $\Delta<0$. Concludendo il trinomio è sempre positivo. Si hanno allora le seguenti possibilità

i. $ax^2+bx+c>0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$;
ii. $ax^2+bx+c\geq 0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$;
iii. $ax^2+bx+c<0$ soluzioni per nessuna valore reale di x;
iv. $ax^2+bx+c\leq 0$ soluzioni per nessuna valore reale di x;

Esempi

- $2x^2-3x+4>0 \rightarrow \Delta=9-32=-23<0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$
- $x^2-x+1<0 \rightarrow \Delta=1-4=-3<0$ per nessuna valore reale di x

Altri esempi

Esempio 1

Determinare l’insieme soluzione della disequazione $2x^2+3x-1>0$

1° passo: scriviamo l'equazione associata $2x^2+3x-1=0$ calcoliamo il delta: $\Delta=9+8=17$ positivo

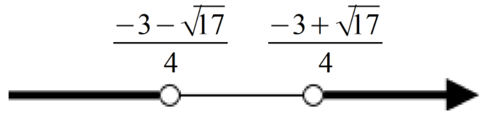
2° passo: calcoliamo le soluzioni: $x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \vee x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$

3° passo: scomponiamo in fattori il trinomio $2x^2+3x-1=2\cdot\left(x-\frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)$

4° passo: studiamo il segno dei singoli fattori e dalla tabellina dei segni deduciamo l’insieme soluzione della disequazione

5° passo: $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<-3-\frac{\sqrt{17}}{4} \vee x>-3+\frac{\sqrt{17}}{4}\right\}$

6° passo rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale



Osserviamo che contemporaneamente sappiamo anche risolvere la disequazione $2x^2+3x-1<0$ e i casi $2x^2+3x-1\geq 0$; $2x^2+3x-1\leq 0$.

Esempio 2

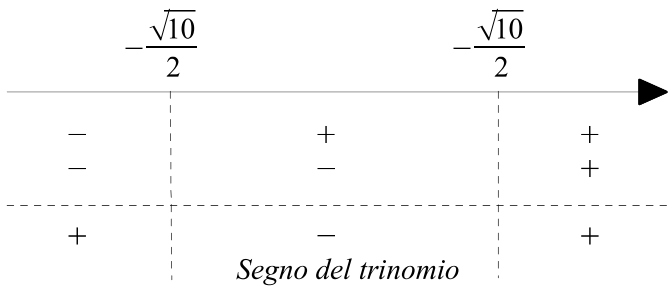
Determinare l’insieme soluzione della disequazione $2x^2-5\leq 0$

1° passo: scriviamo l'equazione associata $2x^2-5=0$, calcoliamo il delta $\Delta=0+40=40>0$

2° passo: determiniamo le soluzioni: $x_1=-\frac{\sqrt{10}}{2} \vee x_2=+\frac{\sqrt{10}}{2}$

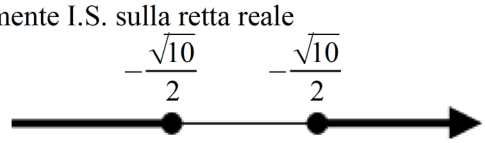
3° passo: scomponiamo in fattori il trinomio $2x^2-5=2\cdot\left(x+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

4° passo: studiamo il segno dei singoli fattori e dalla tabellina dei segni deduciamo l’insieme soluzione della disequazione



5° passo: $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{\sqrt{10}}{2}\leq x\leq +\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$

6° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale



Esempio 3

Determinate l'insieme soluzione della disequazione $-3x^2+2x>0$ equivalente a $3x^2-2x<0$

1° passo: scriviamo l'equazione associata $3x^2-2x=0$ e calcoliamo il delta: $\Delta=4+0=4>0$

2° passo: calcoliamo le soluzioni dell'equazione $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{3}$

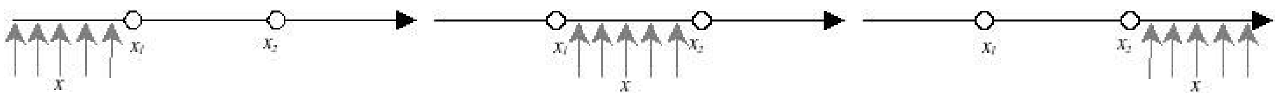
3° passo: scomponiamo in fattori il trinomio $3x^2-2x=3\cdot x\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$

4° passo: studiamo il segno dei singoli fattori e deduciamo l'insieme soluzione della disequazione

5° passo: $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<\frac{2}{3}\right\}$

6° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale

In generale, data la disequazione $ax^2+bx+c>0$ o $ax^2+bx+c<0$ dopo aver scomposto in fattori il trinomio si ha:



$x<x_1$	$x_1<x<x_2$	$x>x_2$
$x-x_1<0 \wedge x-x_2<0$	$x-x_1>0 \wedge x-x_2<0$	$x-x_1>0 \wedge x-x_2>0$
$a(x-x_1)(x-x_2)>0$	$a(x-x_1)(x-x_2)<0$	$a(x-x_1)(x-x_2)>0$
$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c>0$

1 Determinare l'Insieme Soluzione della disequazione:

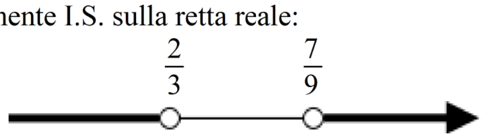
$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+x\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)>x^3-\frac{x}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{8}{27}$$

Svolgete i calcoli in entrambi i membri con l'obiettivo di ottenere la forma canonica della disequazione di secondo grado. Otterrete $27x^2-39x+14>0$

1° passo: calcoliamo il delta dell'equazione associata: $\Delta=9$ e le sue soluzioni $x_1=\frac{2}{3} \vee x_2=\frac{7}{9}$

2° passo: ci troviamo nel caso 3 a) dunque $I.S..=\left\{x\in R \mid x<\frac{2}{3} \vee x>\frac{7}{9}\right\}$ o $I.S.=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{9},+\infty\right)$

3° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale:



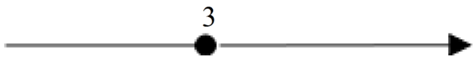
2 Determinare l'Insieme Soluzione della disequazione: $\frac{(2x-1)^3-8x}{2}-\frac{(2x+1)^2-15}{4}\leq 4x(x-1)^2-6$

Svolgere i calcoli in entrambi i membri con l'obiettivo di ottenere la forma canonica della disequazione di secondo grado. Verificare che si ha: $x^2-6x+9\leq 0$

1° passo: calcoliamo il delta dell'equazione associata: $\Delta=0$ e dunque le sue soluzioni sono reali coincidenti $x_1=x_2=3$

2° passo: ci troviamo nel caso 3 b) dunque $I.S.=\{3\}$

3° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale:



3 Determinate l'Insieme Soluzione della disequazione: $8x-(x-5)^2<2x\cdot(5+x)$

Dopo aver svolto i calcoli in entrambi i membri verificate che si ha: $-3x^2+8x-25<0$ equivalente a $3x^2-8x+25>0$

1° passo: calcoliamo il delta dell'equazione associata: $\Delta=64-12\cdot 25=\ldots\ldots$ negativo, dunque le sue soluzioni non sono reali

2° passo: ci troviamo nel caso 3 c) dunque $I.S.=\mathbb{R}$

3° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale: 

Risolvere le seguenti disequazioni di II grado

4	$x^2-6x\leq 0$	$5x^2>0$	R. $0\leq x\leq 6$ R. $x\neq 0$
5	$3x^2\leq -1$	$x^2-9>0$	R. $\emptyset$ R. $x_1<-3 \vee x>3$
6	$2x^2-3x+1>0$	$-x^2+3x\geq 0$	R. $x<\frac{1}{2} \vee x>1$ R. $0\leq x\leq 3$
7	$3x^2+x-2>0$	$x^2-4>0$	R. $x_1<-1 \vee x>\frac{2}{3}$ R. $x_1<-2 \vee x>2$
8	$\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1<0$	$x^2-8\leq 0$	R. $-2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$ R. $-\frac{3}{4}<x<1$
9	$x^2-5x+3\geq 0$	$x^2-4x+9>0$	R. $x\leq\frac{5-\sqrt{13}}{2} \vee x\geq\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ R. $\mathbb{R}$
10	$x^2-6x+8<0$	$x^2+3x-4\geq 0$	R. $2\leq x\leq 4$ R. $x\leq -1 \vee x\geq 4$
11	$x^2-4x-9\leq 0$	$x^2-9x+18<0$	R. $-\sqrt{13}\leq x\leq 2+\sqrt{13}$ R. $3<x<6$
12	$x^2-8x+15\geq 0$	$-2x^2\geq 0$	R. $x\leq 3 \vee x\geq 5$ R. $x=0$
13	$3x^2-\frac{2}{3}x-1<0$	$x^2+5>0$	R. $\frac{1-2\sqrt{7}}{9}\leq x\leq\frac{1+2\sqrt{7}}{9}$ R. $\mathbb{R}$
14	$x^2+6x-2>0$	$2x^2+5x+4\leq 0$	R. $[x<-3-\sqrt{11} \vee x>-3+\sqrt{11}]$ R. $\emptyset$
15	$x^2-3x-\frac{5}{2}<0$	$x^2+1>0$	R. $x<\frac{3-\sqrt{19}}{2} \vee x>\frac{3+\sqrt{19}}{2}$ R. $\mathbb{R}$
16	$-x^2+5\leq 0$	$x^2+x>0$	R. $x\leq -\sqrt{5} \vee x\geq\sqrt{5}$ R. $x\leq -1 \vee x\geq 0$
17	$(x+1)^2\geq 0$	$x^2>1$	R. $\mathbb{R}$ R. $x<-1 \vee x>1$
18	$2x^2-6<0$	$-x^2-1\leq 0$	R. $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ R. $\mathbb{R}$
19	$9-4x^2\geq 0$	$3x-2x^2>0$	R. $x\leq -\frac{3}{2} \vee x\geq\frac{3}{2}$ R. $0<x<\frac{3}{2}$
20	$x^2\geq 0$	$2x^2+4>0$	R. $\mathbb{R}$ R. $\mathbb{R}$
21	$x^2-x-2>0$	$x^2+11x+30<0$	R. $x<-1 \vee x>2$ R. $-6\leq x\leq -5$
22	$-x^2+4x+3>0$	$x^2+4x+4<0$	R. $2-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{7}$ R. $\emptyset$
23	$x^2-x+1<0$	$x^2-\frac{1}{9}\geq 0$	R. $\emptyset$ R. $x\leq -\frac{1}{3} \vee x\geq\frac{1}{3}$
24	$9x^2+3x-2\leq 0$	$2x^2+5<0$	R. $-\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{1}{3}$ R. $\emptyset$
25	$4x-x^2\geq 0$	$9x^2+10x+1\leq 0$	R. $0\leq x\leq 4$ R. $-1\leq x<-\frac{1}{9}$

26 $0{,}01x^2-1>0$ $\quad 1{,}\overline{6}x^2-2x\le 0$ R. $x<-10 \vee x>10$ R. $0\le x<\frac{6}{5}$

27 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}>0$ $\quad 4x^2+\frac{5}{3}x-1\le 0$ R. $x<-\frac{1}{2} \vee x>\frac{1}{2}$ R. $-\frac{2}{3}\le x\le\frac{1}{3}$

28 $x^2+x+\sqrt{2}>0$ $\quad x^2+2\sqrt{2}x+2>0$ R. $\mathbb{R}$ R. $\mathbb{R}$

29 $(3x+1)^2>(2x-1)^2$ R. $x<-2 \vee x>0$

30 $(x+1)(x-1)^2>x^3$ R. $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

31 $\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)(x-1)}{4}>x^2-1$ R. $-1<x<\frac{5}{3}$

32 $(x+1)^3-(x+2)^2>\frac{2x^3-1}{2}$ R. $x<\frac{1-\sqrt{21}}{4} \vee x>\frac{1+\sqrt{21}}{4}$

33 $(x-2)(3-2x)\ge x-2$ R. $1\le x\le 2$

34 $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)\le 2x-1$ R. $-1\le x\le -\frac{7}{6}$

35 $\frac{x^2+16}{4}+x-1<\frac{x-3}{2}$ R. $\emptyset$

36 $\frac{3x-2}{2}>x^2-2$ R. $x\le -\frac{1}{2} \vee x\ge 2$

37 $12x^2-3\ge 4x(2x-1)$ R. $x\le -\frac{3}{2} \vee x\ge\frac{1}{2}$

38 $\frac{x-3}{2}-\frac{x^2+2}{3}<1+x$ R. $\mathbb{R}$

39 $(x+4)^2+8\ge\frac{x-1}{3}$ R. $\mathbb{R}$

40 $\left(\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}\right)^2\le(x+1)^2$ R. $x\le -\frac{8}{5} \vee x\ge -\frac{4}{7}$

41 $3x-5+(1-3x)^2>(x-2)(x+2)$ R. $x<0 \vee x>\frac{3}{8}$

42 $\frac{x-2}{3}-(3x+3)^2>x$ R. $-\frac{29}{27}<x<-1$

43 $(x-2)^3-x^3>x^2-4$ R. $\frac{6-2\sqrt{2}}{7}<x<\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$

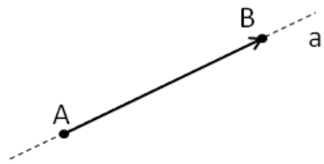
44 $(2-x)^3-(2-x)^2<\frac{3-4x^3}{4}$ R. $I.S.=\emptyset$

45 $(x+200)^2+x+200<2$ R. $-202<x<-199$

►2. Segno del trinomio di secondo grado

Vettori nel piano e traslazione

Sappiamo che due punti A e B presi su una retta *a* determinano il segmento di estremi A e B; fissiamo su di esso un verso di percorrenza, per esempio da A verso B.



> DEFINIZIONE: il **segmento orientato** di estremi A e B si chiama **vettore**; esso viene indicato con $\overrightarrow{AB}$ oppure con $\vec{u}$; il punto A ne è il primo estremo e il punto B il secondo estremo.

Le caratteristiche di un vettore:

1. la **direzione** indicata dalla retta su cui giace;
2. il **verso** indicato dalla punta della freccia che dal primo estremo va al secondo estremo;
3. il **modulo o intensità,** uguale alla misura del segmento AB: scriveremo $|u|=\overline{AB}$ e leggeremo "modulo del vettore $\vec{u}$ uguale alla misura del segmento AB".

<u>Esempi</u>

I due vettori $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{DC}$ in figura 1 appartengono alla stessa retta, quindi hanno stessa direzione, verso opposto e modulo diverso.

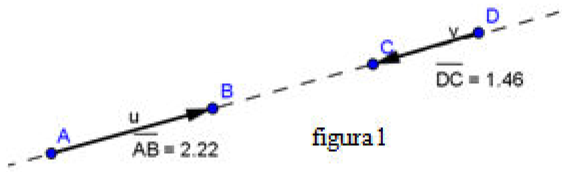


figura 1

I vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ in figura 2 appartengono a rette parallele, quindi hanno stessa direzione, verso opposto e uguale intensità: essi si chiamano **vettori opposti** e scriveremo $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DC}$.

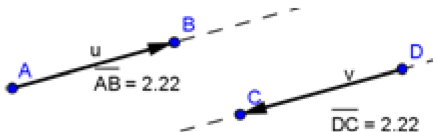


figura 2

I vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DD'}$ in figura 3 appartengono a rette parallele, quindi hanno stessa direzione, lo stesso verso e uguale intensità: essi si chiamano **vettori equipollenti** e scriveremo $\overrightarrow{AB}\equiv\overrightarrow{DD}$.

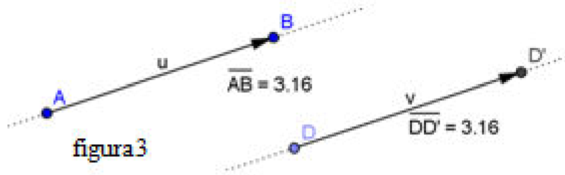
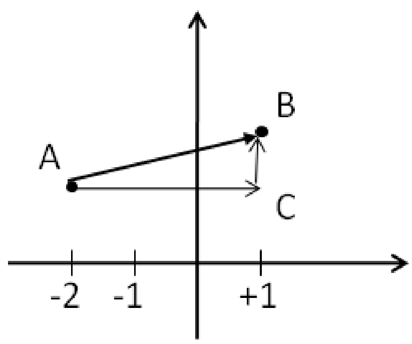


figura 3

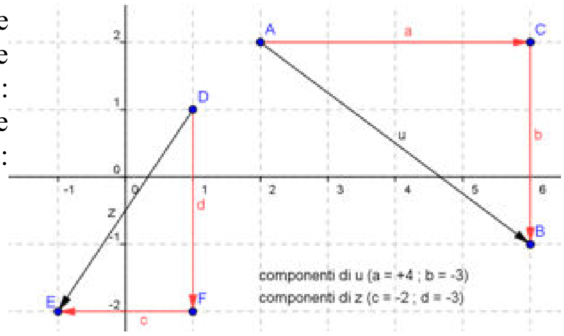
Un vettore può essere interpretato come uno spostamento dal primo estremo al secondo estremo, avente la direzione della retta cui appartiene il vettore stesso e il verso quello indicato dalla freccia.

Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale è rappresentato il vettore $\overrightarrow{AB}$ (vedi figura accanto) avente il primo estremo nel punto A(-2;1) e il secondo estremo in B(1;2).
Per andare da A a B si possono compiere diversi percorsi: possiamo procedere sul vettore $\vec{u}$ oppure possiamo scegliere di compiere due spostamenti: uno parallelo all'asse x e poi l'altro parallelo all'asse y. In tal modo si determina il punto C(1;1) come "tappa intermedia" per raggiungere B: ci spostiamo sul vettore $\overrightarrow{AC}$ e poi da C sul vettore $\overrightarrow{CB}$.



Chiamiamo componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ le misure con segno dei segmenti AC e CB con la precisazione di assegnare il segno + alle misure dello spostamento avente lo stessoverso degli assi e segno – se il verso è opposto a quello degli assi .

Nella figura, il vettore $\vec{z}$ ha componenti entrambe negative poiché lo spostamento orizzontale e quello verticale avvengono in verso contrario rispetto agli assi coordinati: scriveremo $\vec{z}=(-2,-3)$. Il vettore $\vec{u}$ ha la componente lungo l'asse x positiva e negativa la componente verticale: scriveremo $\vec{u}=(+4,-3)$



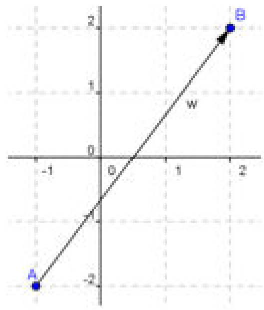
Regola per determinare le componenti cartesiane di un vettore $\vec{v}$, note le coordinate cartesiane degli estremi $A(x_A ; y_A)$ e $B(x_B ; y_B)$:

- dal primo estremo tracciamo la parallela all'asse x e dal secondo estremo la parallela all'asse y determinando il punto $C(x_B ; y_A)$;
- calcoliamo le misure con segno $a=x_b-x_A$: $b=y_b-y_A$;
- scriviamo $\vec{v}=(a ; b)$.

Ottenute le componenti è facile determinare il **modulo del vettore** con il teorema di Pitagora:

$|\vec{u}|=\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$. Il rapporto $\frac{b}{a}=m_{(\vec{u})}$ indica la **direzione del vettore**.

46 Assegnato il vettore della figura, determinare le sue componenti, il modulo e la direzione.



Completate i passi indicati nella strategia risolutiva:
scrivete le coordinate degli estremi del vettore assegnato $A(\ldots ; \ldots)$ e $B(\ldots ; \ldots)$
individuate le componenti del vettore $\vec{w}$

- segnate il punto C; calcolate $a=x_b-x_A$: $b=y_b-y_A$
- le componenti del vettore sono $\vec{w}(\ldots\ldots ; \ldots\ldots)$
- determinate il modulo del vettore $|\vec{w}|=\overline{AB}\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$
- determinate la direzione del vettore $m_{(\vec{w})}=\ldots\ldots\ldots$.

47 Tracciate nel riferimento cartesiano ortogonale il vettore $\vec{v}(1 ; -3)$.
Nella richiesta di questo quesito sembra manchi qualcosa: conosciamo le componenti del vettore, ma dove mettiamo il primo estremo?
Provate a mettere il primo estremo in ciascuno dei seguenti punti $A_1(-1 ; 2)$, $A_2(1 ; 0)$; $A_3(3 ; -2)$ $O(0{,}0)$ e determinate il secondo estremo di ciascun vettore; completate indicando per ciascuno il modulo e la direzione:
È vero che tutti i vettori tracciati sono equipollenti?

Conclusione: quando si assegna un vettore mediante le sue componenti collocheremo il primo estremo nell'origine del riferimento cartesiano ortogonale e il secondo estremo (punta della freccia) avrà come coordinate le componenti del vettore in questione.

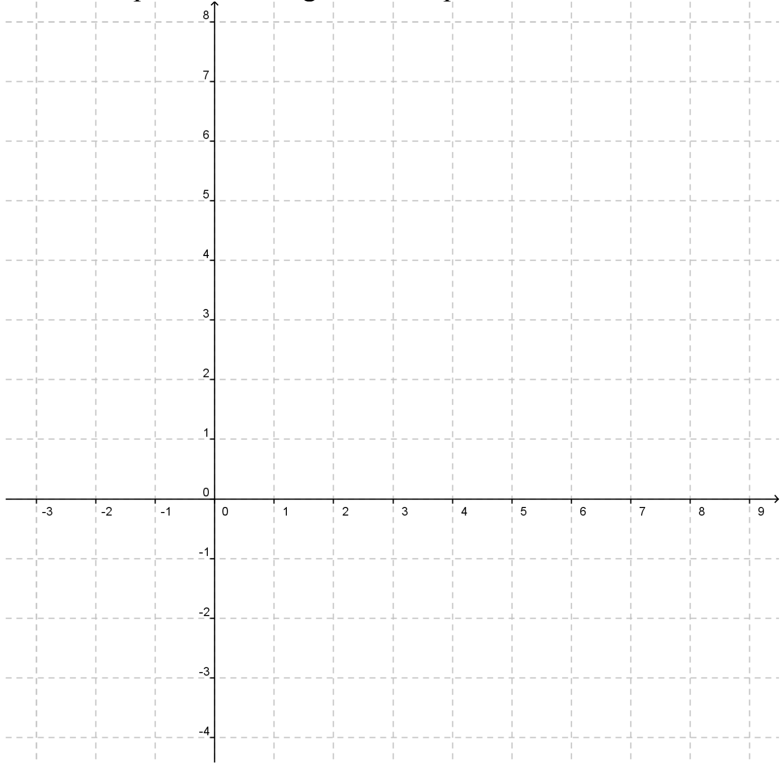
48 Segnate nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale i vettori $\vec{v}(1 ; 2)$ e $\vec{w}(3 ; 1)$. Possiamo affermare che $|\vec{w}|=2\cdot|\vec{v}|$?

49 Pensiamo il piano, dotato di riferimento cartesiano ortogonale, come formato da due cartoncini sovrapposti: sul piano D, trasparente, i punti sono rappresentati dal solito simbolo, sull'altro C, sottostante, i punti sono rappresentati con +.
Studiamo la corrispondenza TR tra i punti del piano D e i punti del piano C espressa dalla legge:

$P(x_P ; y_P)\in D \xrightarrow{TR} P'(x_p+1 ; y_p+(-3))\in C$.

Se $A(1 ; 5)$ è il punto di D il suo corrispondente è $B(2 ; 2)$.

Determinate il corrispondente di ciascuno dei seguenti punti $F(0;2);\ H(-1:8);\ K(3;3);\ V(4;-1)$
Rispondete alle domande:
è vero che il dominio della corrispondenza coincide con D?
è vero che la corrispondenza assegnata è univoca?
si può affermare che è biunivoca?
di quale punto è immagine il punto S'(0;-4)?
Nel riferimento cartesiano rappresentate ogni punto di F, H, K, V e i corrispondenti F', H', K', V' e congiungete ciascuno con la propria immagine. I vettori $\overrightarrow{FF'}, \overrightarrow{HH'}, \overrightarrow{KK'}, \overrightarrow{VV'}$ sono equipollenti?
Possiamo affermare che la corrispondenza assegnata è completamente caratterizzata dal vettore $\vec{v}(1;-3)$.



DEFINIZIONE. Fissato nel piano un vettore $\vec{v}$ si chiama **traslazione di vettore** $\vec{v}$ la corrispondenza che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' dello stesso piano in modo che $\overrightarrow{PP'}=\vec{v}$

Nel piano dotato di riferimento cartesiano, assegnato il vettore $\vec{v}=(a;b)$ la traslazione è completamente determinata e per qualunque punto $P(x_P;y_P)$ è univocamente determinato il punto corrispondente $P'(x_P+a;y_P+b)$.

DEFINIZIONE. Indicando con x e y le coordinate del punto P e con x', y' le coordinate del punto corrispondente si chiama **equazione della traslazione di vettore** $\vec{v}(a;b)$ la formula $TR(a;b):\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\end{cases}$

Gli esercizi che seguono hanno come obiettivo l'individuazione di alcune proprietà della traslazione, per cui ti consigliamo di svolgerli direttamente sul manuale.

50 Nel riferimento cartesiano è assegnato il punto $P(-4;2)$; determinate il punto P' immagine nella traslazione $TR(3,-1):\begin{cases}x'=x+3\\y'=y+(-1)\end{cases}$.

Strategia risolutiva:

- individuate il vettore $\vec{w}$ della traslazione: $\vec{w}(\ldots;\ldots)$;
- tracciate il vettore nel riferimento cartesiano;

- determinate le coordinate di P': $P'(\ldots;\ldots)$;
- Completate: $\overrightarrow{PP'}$ è ……….. a $\vec{w}$; questo significa che i due vettori hanno …….. direzione (sono cioè …………), stesso …….. e ………… intensità.
- Nello stesso riferimento dopo aver fissato un punto $Q(\ldots;\ldots)$ e il punto $Q'(\ldots;\ldots)$ immagine nella stessa traslazione $TR(3,-1)$, dimostrate con le conoscenze di geometria sintetica che $PP'Q'Q$ è un parallelogrammo.
- Ipotesi: $PP'\equiv QQ'$; $PP'\ldots\ldots QQ'$
- Tesi: ……….
- Dimostrazione

Dalla dimostrazione richiesta nell'esercizio precedente, possiamo concludere che segmenti corrispondenti sono congruenti. Secondo voi questa dimostrazione dipende dai punti P e Q scelti?

DEFINIZIONE. Una corrispondenza tra punti del piano che associa a due punti P e Q arbitrariamente scelti altri due punti P' e Q' in modo che **P'Q'** risulti **congruente a PQ** è detta **isometria**.

La traslazione è una isometria.

51 Verificate che il punto medio M del segmento PQ ha come immagine in TR(3,-1) il punto medio M' del segmento P'Q'.

52 Ripetete l'esercizio precedente prendendo il punto medio M_1 di PM e poi M_2 medio di PM_1 e anche M_3 medio di MQ e altri ancora a vostro piacimento. Potrete ragionevolmente concludere che **la traslazione** è una isometria che **conserva l'appartenenza**?

►3. La risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado

Ricordiamo alcune definizioni.

Un polinomio in una sola variabile, solitamente indicata con x, è di secondo grado se **2 è il massimo esponente della variabile**.

Per **trinomio di secondo grado** intendiamo un polinomio di secondo grado: ax^2+bx+c con $a\in\mathbb{R}_0,\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$

Chiamiamo **zeri del trinomio** i valori reali soluzione dell'equazione associata $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$.

DEFINIZIONE. Una funzione che associa ad ogni numero reale x il numero reale $y=ax^2+bx+c$ con $a\in\mathbb{R}_0,\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$ si chiama **funzione polinomiale di secondo grado**.

Nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico della funzione è costituito da tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione $y=ax^2+bx+c$; se x_1 e x_2 sono gli zeri reali del trinomio ax^2+bx+c allora attribuendo tali valori alla variabile *x* si ha $y=0$; essi sono dunque **gli zeri della funzione**, ossia le ascisse dei punti del grafico appartenenti all'asse *x*.

Esempi

- ■ Determinate gli zeri del trinomio x^2+x-2 .

Strategia risolutiva

Risolviamo l'equazione $x^2+x-2=0$ che avendo il discriminante positivo ammette due soluzioni reali distinte $x_1=-2 \vee x_2=1$. I due numeri 1 e –2 sono gli zeri del trinomio e dunque gli zeri della funzione; $y=x^2+x-2$ nel riferimento cartesiano ortogonale i punti $P_1(-2;0)$ e $P_2(1;0)$ sono i punti del grafico della funzione appartenenti all'asse x.

- ■ Determinare gli zeri del trinomio x^2-4x+4 .

Strategia risolutiva

Risolviamo l'equazione $x^2-4x+4=0$ che avendo il discriminante nullo ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1=x_2=2$ gli zeri del trinomio sono coincidenti nel numero 2 e il grafico della funzione $y=x^2-4x+4$ ha due punti coincidenti appartenenti all'asse *x*: $P_1\equiv P_2(2;0)$.

- ■ Determinare gli zeri del trinomio x^2-2x+7 .

Strategia risolutiva

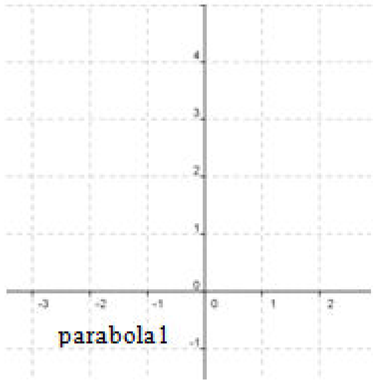
Risolviamo l'equazione $x^2-2x+7=0$ che avendo il discriminante negativo non ammette soluzioni reali; il trinomio non ha zeri reali e il grafico della funzione $y=x^2-2x+7$ non ha punti appartenenti all'asse *x*.

Questi esempi ci hanno permesso di chiarire il collegamento tra concetto algebrico “zeri di un polinomio” con il concetto geometrico di “punti sull’asse delle ascisse” del grafico della funzione polinomiale di secondo grado; pertanto **studiare il segno di un trinomio di secondo grado equivale a determinare quali sono le ascisse dei punti della funzione** $y=ax^2+bx+c$ (con $a\in\mathbb{R}_0,\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$) **che hanno ordinata > 0 oppure ordinata < 0, oppure ordinata ≥ 0, oppure ordinata ≤ 0**.
Ricordiamo che nel riferimento cartesiano ortogonale i punti ad ordinata positiva si trovano nel I e nel II quadrante (al di sopra dell’asse x), i punti ad ordinata negativa si trovano nel III e nel IV quadrante (al di sotto dell’asse x), i punti ad ordinata nulla si trovano sull’asse x.
Per studiare il segno del trinomio, dobbiamo tracciare nel riferimento cartesiano il grafico della funzione $y=ax^2+bx+c$ (con $a\in\mathbb{R}_0,\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$) e lo faremo riprendendo il grafico della funzione di proporzionalità quadratica esaminata nel volume di Algebra 1.

53 Tracciate nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico della funzione $y=2x^2$. Sappiamo che $D\equiv R$; poiché il coefficiente della variabile indipendente è positivo si ha $\text{IM}=R^{-}\cup\{0\}$ e la parabola volge la concavità verso l’alto; il punto $O(0;0)$ è il suo vertice. Per la costruzione richiesta compilate la tabella:

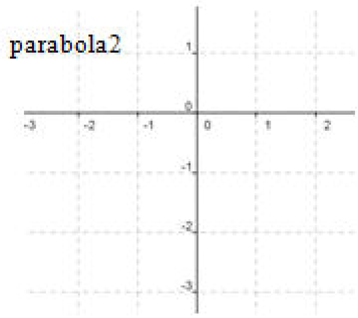
$y=2x^2$										
	x	-1			0			$1{,}5$		
	y									

e segnate i punti nel riferimento cartesiano

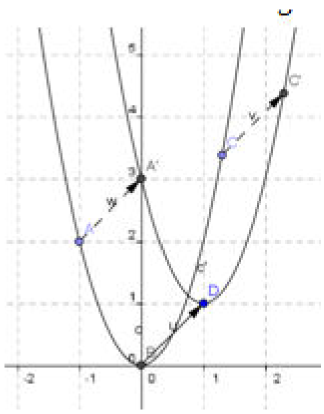


54 Ripetete la costruzione per la funzione $y=-\frac{3}{2}x^2$ compilando l’opportuna tabella; essendo il coefficiente negativo la parabola volge la concavità verso il basso, il punto $O(0;0)$ è il suo vertice. $D\equiv R$ e $\text{IM}=R^{+}\cup\{0\}$

………										
	x	-1			0			$1{,}5$		
	y									



55 Applicate a tutti i punti della tabella dell'esercizio della parabola $y=2x^2$ la traslazione di vettore $\vec{v}(1;1)$; compilate la nuova tabella dei punti corrispondenti, riportateli nel riferimento cartesiano e tracciate la curva immagine della parabola.
Abbiamo eseguito l’esercizio con un programma di geometria dinamica e abbiamo ottenuto la seguente immagine dalla quale possiamo leggere le seguenti informazioni:



- l’immagine della parabola iniziale *c*, è ancora una parabola *c’* essendo la traslazione una isometria;
- la parabola *c’* volge la concavità verso l’alto, come la parabola iniziale *c;*
- il vertice $O(0;0)$ della parabola *c* ha come immagine il vertice della parabola *c’* $D(1;1)$, coincidente con l’estremo libero del vettore che definisce la traslazione;
- il vettore che individua la traslazione è indicato nella figura con u; v e w rappresentano lo stesso vettore applicato a due punti presi a caso sulla parabola iniziale;
- la parabola *c’* è rappresentata dalla funzione $y=2x^2-4x+3$, funzione di secondo grado avente il primo coefficiente uguale a quello della parabola *c*.

Problema

Come possiamo determinare l'equazione della parabola immagine di $y=2x^2$ applicando la traslazione $TR(1,1)$?

Strategia risolutiva

la traslazione è rappresentata da $TR(1;1): \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+1 \end{cases}$ che esprime il legame algebrico tra le coordinate di un punto della parabola c e il punto corrispondente su c'.

Riscriviamo l'equazione della traslazione $\begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'-1 \end{cases}$ e sostituiamo nell'equazione di *c*: $(y'-1)=2\cdot(x'-1)^2$ da cui svolgendo i calcoli ……………………………………………………….. potrete ottenere l'equazione di c' come indicato nell'esercizio precedente.

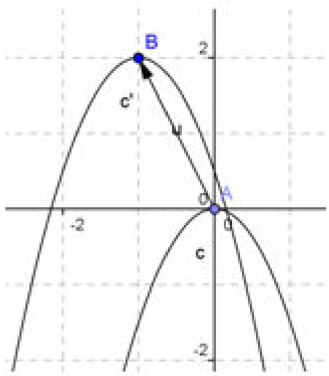
56 Ripetere l'esercizio precedente sulla parabola $y=-\frac{3}{2}x^2$, applicando a tutti i punti della tabella della parabola la traslazione di vettore $\vec{v}(-1;2)$. Compilare la nuova tabella dei punti corrispondenti, riportarli nel riferimento cartesiano e tracciare la curva immagine della parabola. Avrete ottenuto:

Completate:

il vertice $O(0;0)$ della parabola iniziale ha come immagine il ………………..…………………………..

sia *c* che *c'* hanno la concavità ……………………………….

Verificate che la parabola *c'* è rappresentata algebricamente dall'equazione $y=-\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{1}{2}$, seguendo la strategia risolutiva proposta nel problema.



Generalizziamo

Applicando alla funzione di proporzionalità quadratica $y=ax^2$ con $a\neq 0$ una traslazione di vettore $\vec{v}(v_x;v_y)$ si ottiene la funzione di secondo grado $y=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$, i cui coefficienti *b* e *c* dipendono dalle coordinate del vettore $\vec{v}$.

Strategia risolutiva

dall'equazione della traslazione $TR(v_x;v_y): \begin{cases} x'=x+v_x \\ y'=y+v_y \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} x=x'-v_x \\ y=y'-v_y \end{cases}$ che sostituiamo nell'equazione $y=ax^2$ per ottenere l'equazione della curva immagine : $(y'-v_y)=a\cdot(x'-v_x)^2$.

Svolti i calcoli, si ottiene: $y'=a(x')^2-(2av_x)x'+a(v_x)^2+v_y$ in cui ponendo - $2av_x=b$ e $a(v_x)^2+v_y=c$ si ottiene l'equazione della parabola *c'* immagine di quella data: $y=ax^2+bx+c$, espressa attraverso un trinomio di secondo grado.

Determinare l'equazione dell'immagine delle seguenti parabole nella traslazione il cui vettore è segnato accanto:

57 $y=x^2$ con $\vec{v}=\left(\frac{1}{2};-2\right)$

58 $y=-\frac{2}{3}x^2$ con $\vec{v}=(2;-2)$

59 $y=-\frac{\sqrt{2}}{3}x^2$ con $\vec{v}=\left(-3;-\frac{1}{4}\right)$

Viceversa

Assegnata la funzione di secondo grado $y=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$, come possiamo rappresentarla nel riferimento cartesiano?

Strategia risolutiva

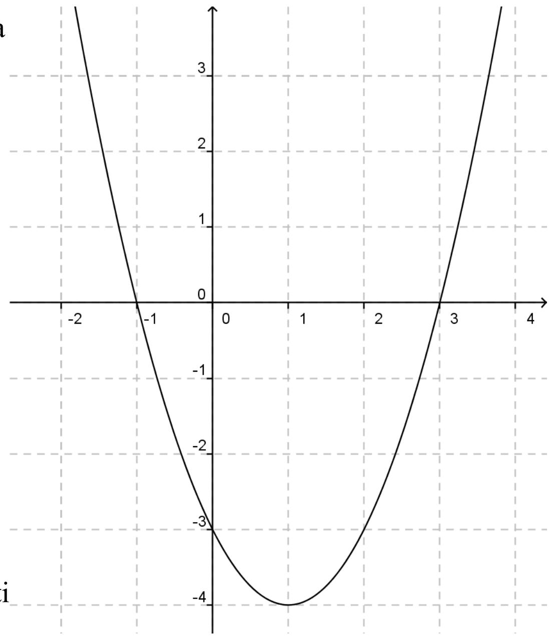
Sapendo che il grafico di tale curva è una parabola

- il coefficiente a indica la concavità: verso l'alto se $a>0$, verso il basso se $a<0$
- dalle formule $-2av_x=b$ e $a(v_x)^2+v_y=c$ ricaviamo le coordinate del suo vertice $v_x=-\dfrac{b}{2a}$ e $v_y=c-a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=-\dfrac{\Delta}{4}a$
- risolvendo l'equazione $ax^2+bx+c=0$ determiniamo gli eventuali punti di intersezione con l'asse x.
- assegnando alla variabile indipendente valori arbitrari, possiamo ottenere altri punti del grafico

<u>Esempio</u>

Tracciate nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico della funzione

f: $y=x^2-2x-3$



Strategia risolutiva

Il grafico di tale curva è una parabola; essendo il coefficiente $a=1$, la concavità è verso l'alto;

essendo $b=-2$ e $c=-3$ si ha

$v_x=-\dfrac{-2}{2}=1$ e $v_y=\dfrac{-12-4}{4}=-4 \rightarrow V(1;-4)$;

possiamo affermare che f è l'immagine di $y=x^2$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(1;-4)$

Compilate la tabella

x	0	$x_1=\ldots\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots\ldots$	2
y	……	0	…..

e confrontate il vostro grafico con quello qui tracciato in cui sono evidenziati il vertice $A(1;-4)$, i punti $B(3;0)$ e $C(-1;0)$ di intersezione con l'asse x.

Rappresentare nel riferimento cartesiano ortogonale le parabole e formulate per ciascuna di esse l'osservazione " p_1 risulta immagine di ... nella traslazione di vettore ...." ecc.

60 p_1: $y=-3x^2+x$

61 p_2: $y=\dfrac{1}{2}x-2x+\dfrac{3}{2}$

62 p_3: $y=x^2+x-1$

63 p_4: $y=x^2-x+1$

64 p_5: $y=-3x^2+3$

65 p_6: $y=x^2+4x+3$

66 p_7: $y=x^2+\dfrac{3}{5}$

67 p_8: $y=-\dfrac{2}{5}x^2+4x-\dfrac{1}{5}$

Ci proponiamo ora di determinare il **segno di un** qualunque **trinomio di secondo grado**, procedendo **per via grafica**.

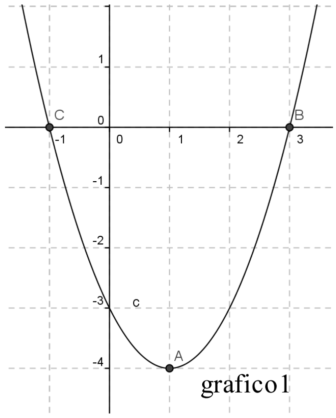


grafico1

Esempio

Studiamo il segno del trinomio x^2-2x-3 ; questo significa stabilire per quali valori di x esso assume un segno positivo oppure un segno negativo e per quali valori eventualmente si annulla. La richiesta è interpretabile anche come la ricerca degli insieme soluzione dell'equazione $x^2-2x-3=0$ e delle disequazioni $x^2-2x-3>0$ e $x^2-2x-3<0$.

Strategia risolutiva:

Tracciamo il grafico della funzione $y=x^2-2x-3$ e leggiamo dal grafico gli insiemi richiesti:

- Le ascisse dei punti B e C costituiscono l'insieme soluzione dell'equazione $x^2-2x-3=0 \ \rightarrow \ x_1=-1 \vee x_2=3$
- I valori di x dell'insieme $H=\{x \in \mathbb{R} \mid x_C<x<x_B\}$ rendono il trinomio negativo; infatti preso un valore dell'insieme, ad esempio $x=0$, il punto sulla parabola ha ordinata negativa (-3) . Segnatelo sul grafico accanto e ripetete per $x=1,\ x=\frac{3}{2},\ x=2$
- I valori di x dell'insieme $K=\{x \in \mathbb{R} \mid x<x_C \vee x>x_B\}$ rendono il trinomio positivo; infatti preso un valore dell'insieme, ad esempio $x=\frac{7}{2}$, il punto sulla parabola ha ordinata positiva. Segnatelo sul grafico accanto e ripetete per $x=-1{,}2$.

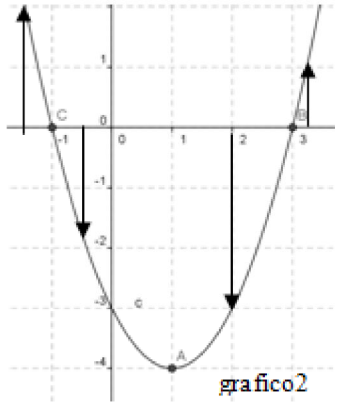
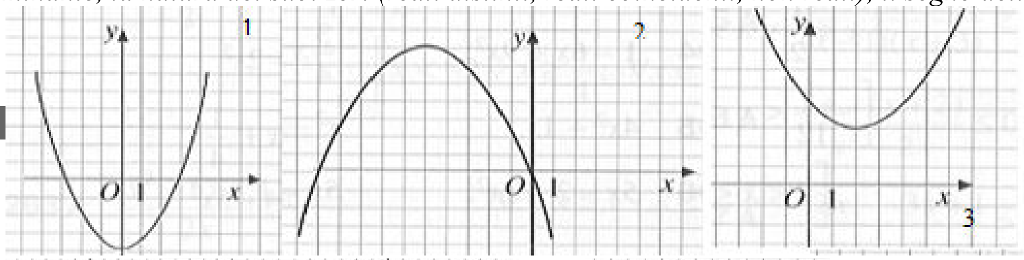


grafico2

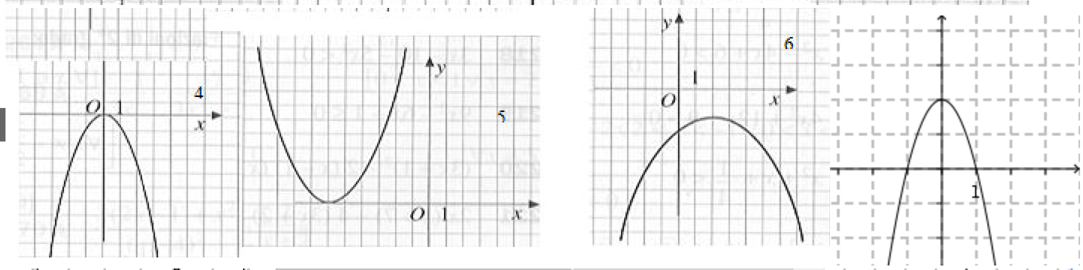
Il grafico 2 può chiarire quanto detto.

Per ciascun grafico di parabola $y=ax^2+bx+c$ *indica il segno del primo coefficiente e del discriminante, la natura dei suoi zeri (reali distinti, reali coincidenti, non reali), il segno della funzione:*

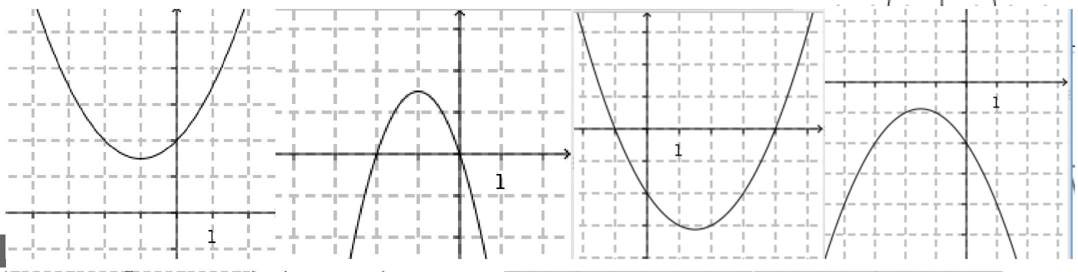
68



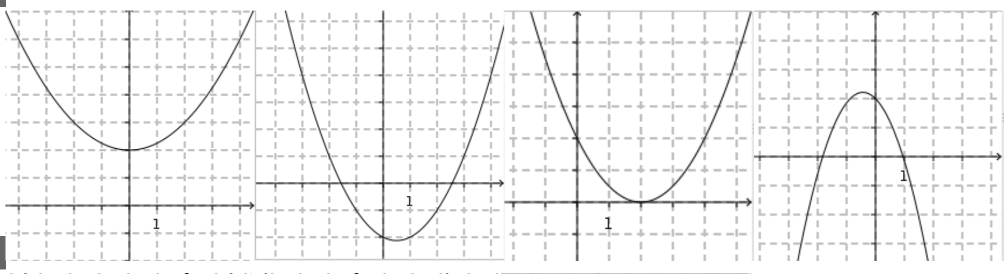
69



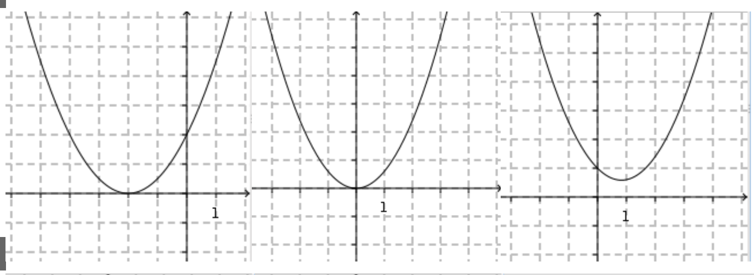
70



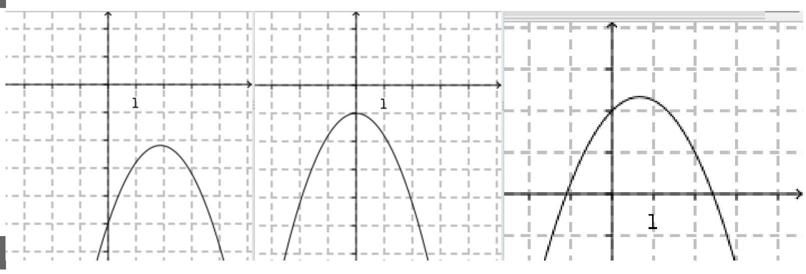
71



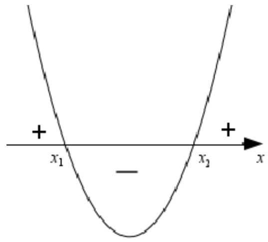
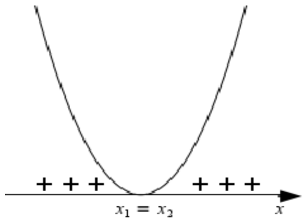
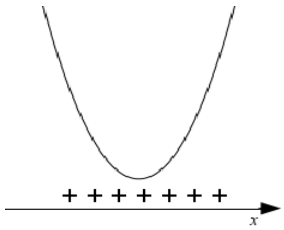
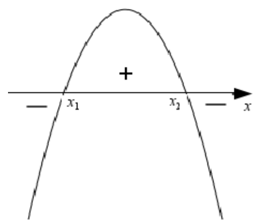
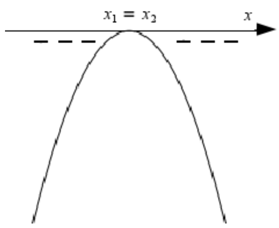
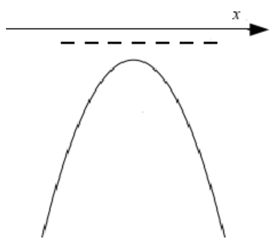
72



73



Osservazione conclusiva: la ricerca dell'insieme soluzione di una disequazione di secondo grado è sempre interpretabile come la ricerca del segno di un trinomio e quindi risolubile per via grafica.
In questi casi non è necessario rappresentare in modo preciso la parabola associata al trinomio, ma basta ricordare quanto detto inizialmente sugli zeri di una funzione.

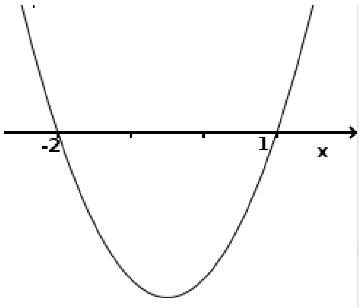
$a>0$			
$\Delta=b^2-4ac$	parabola	segno	Insieme soluzione
$\Delta>0$ soluzioni reali distinte		$ax^2+bx+c=0$	$x=x_1 \vee x=x_2$ x_1 x_2 x
		$ax^2+bx+c>0$	$x<x_1 \vee x>x_2$ x_1 x_2 x
		$ax^2+bx+c<0$	$x_1<x<x_2$ x_1 x_2 x
$\Delta=0$ soluzioni reali coincidenti		$ax^2+bx+c=0$	$x=x_1=x_2$ $x_1=x_2$ x
		$ax^2+bx+c>0$	$x\in\mathbb{R}-\{x_1\}$ $x_1=x_2$ x
		$ax^2+bx+c<0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ x
$\Delta<0$ soluzioni non reali		$ax^2+bx+c=0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ x
		$ax^2+bx+c>0$	$x\in\mathbb{R}$ *tutti i numeri reali*
		$ax^2+bx+c<0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ x
$a<0$			
$\Delta>0$ soluzioni reali distinte		$ax^2+bx+c=0$	$x=x_1 \vee x=x_2$ x_1 x_2 x
		$ax^2+bx+c>0$	x_1 x_2 x
		$ax^2+bx+c<0$	x_1 x_2 x
$\Delta=0$ soluzioni reali coincidenti		$ax^2+bx+c=0$	$x_1=x_2$ x
		$ax^2+bx+c>0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ x
		$ax^2+bx+c<0$	$x_1=x_2$ x
$\Delta<0$ soluzioni non reali		$ax^2+bx+c=0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ x
		$ax^2+bx+c>0$	*nessun numero reale* *I.S.* $=\emptyset$ x
		$ax^2+bx+c<0$	$x\in\mathbb{R}$ *tutti i numeri reali*

Esempio

Determinate l'insieme soluzione della disequazione: $x^2+x-2>0$

Strategia risolutiva:

risolviamo l'equazione $x^2+x-2=0$ che avendo il discriminante positivo ammette due soluzioni reali distinte $x_1=-2 \vee x_2=1$. I due numeri 1 e -2 sono gli zeri del trinomio e dunque gli zeri della funzione $y=x^2+x-2$; la parabola volge la concavità verso l'alto quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione rispetto all'asse x e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-2 \vee x>1\}$ o con notazione insiemistica $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

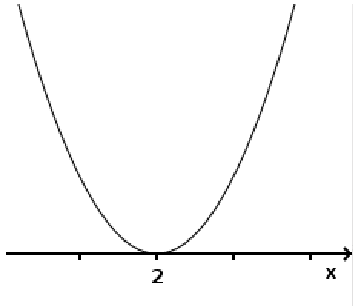


Esempio

Determinate l'insieme soluzione della disequazione $x^2-4x+4\leq 0$.

Strategia risolutiva:

risolviamo l'equazione $x^2-4x+4=0$ che avendo il discriminante nullo ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1=x_2=2$: gli zeri del trinomio sono coincidenti nel numero 2, la parabola $y=x^2-4x+4$ ha il vertice sull'asse x e volge la concavità verso l'alto quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=2\}$ nessun valore reale rende il trinomio negativo.

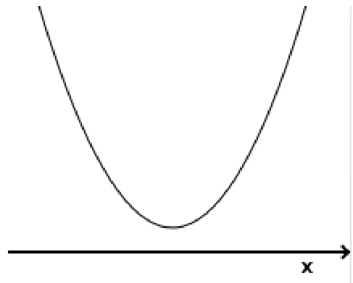


Esempio

Determinate l'insieme soluzione della disequazione $x^2-2x+7>0$.

Strategia risolutiva:

risolviamo l'equazione $x^2-2x+7=0$ che avendo il discriminante negativo non ammette soluzioni reali; il trinomio non ha zeri reali, la parabola $y=x^2-2x+7$ volge la concavità verso l'alto e non ha punti appartenenti all'asse x quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $I.S.=\mathbb{R}$



Risolvete le disequazioni di secondo grado, collocando le rispettive parabole grossolanamente rispetto all'asse x, come fatto negli esempi:

74	$2x^2+3x-1<0$	$x^2-5x+6\leq 0$	$x^2-3x-4>0$
75	$x^2-6x+5\geq 0$	$6x^2+x-2>0$	$15x^2+x-6\leq 0$
76	$-x^2+1\geq 0$	$x^2-\frac{1}{4}>0$	$x^2-\frac{1}{4}x\leq 0$
77	$x^2+2x\leq 0$	$x^2+2x+1\leq 0$	$x^2+x+1<0$

Esempio

Determinare l'insieme soluzione della disequazione $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2-2x>\frac{5}{4}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

- 1° passo: risolviamo i calcoli ai due membri della disequazione ……………………………
- 2° passo: riconoscendola di secondo grado portiamola nella forma canonica; verificate che si ottiene $2x^2-13x+18>0$
- 3° passo: consideriamo la parabola $y=2x^2-13x+18$ e determiniamo i suoi zeri. Essendo il discriminante positivo $\Delta=\ldots\ldots\ldots$ si ottengono due zeri reali distinti $x_1=\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots$
- 4° passo: disegniamo grossolanamente la parabola rispetto all'asse x:
- 5° passo: concludiamo: $I.S.=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

asse x

Scegliete la risposta esatta tra quelle proposte

78 Il monomio $16\,x^2$ risulta positivo per:

[A] $x>16$ [B] $x>\frac{1}{16}$ [C] $x<-4 \vee x>16$ [D] $x\in\mathbb{R}$ [E] $x\in\mathbb{R}_0$

79 Il binomio $16+x^2$ risulta positivo per:

[A] $x>-16$ [B] $-4<x<4$ [C] $x\in\mathbb{R}-\{-4,4\}$ [D] $x\in\mathbb{R}$ [E] $x<-4 \vee x>4$

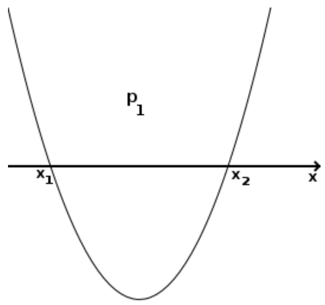
80 Scegliete la risposta esatta tra quelle proposte: il binomio $16-x^2$ risulta positivo per:

[A] $x<-16$ [B] $-4<x<4$ [C] $x\in\mathbb{R}-\{-4,4\}$ [D] $x\in\mathbb{R}$ [E] $x<-4 \vee x>4$

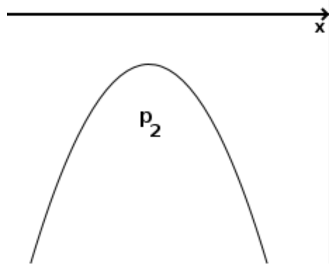
81 Spiegate sfruttando il metodo grafico la verità della proposizione: “nessun valore della variabile a rende il polinomio $(3+a)^2-(2a+1)\cdot(2a-1)-(a^2+2a+35)$ positivo”.

82 Sono assegnate le due parabole p_1 e p_2 ; indicate le caratteristiche del trinomio $a\,x^2+b\,x+c$ (primo coefficiente, discriminante) che compone l’equazione cartesiana di ciascuna. Completa quanto proposto dando chiare motivazioni:

p_1: a ....; $\Delta=$........



p_2: a ....; $\Delta=$........



►4. Segno del trinomio a coefficienti letterali

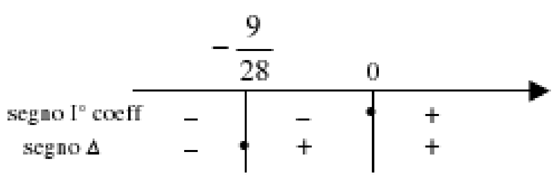
Consideriamo il trinomio $t=k\,x^2+3\,x-7$ di secondo grado avente il primo coefficiente dipendente dal parametro *k*. Come possiamo stabilire il segno di questo trinomio, al variare di *k*?
Sappiamo che stabilire il segno di un trinomio significa determinare i valori reali che attribuiti alla variabile indipendente x rendono il trinomio positivo, nullo o negativo. Evidentemente per ogni valore reale di k avremo una diversa disequazione da risolvere; dobbiamo dunque cercare di analizzare come varia il trinomio a seconda dei valori di *k* e in seguito studiare il segno del trinomio ottenuto. Questa analisi di situazioni diverse è la **discussione del trinomio a coefficienti parametrici**.

<u>Esempio</u>

Stabilire il segno di $t=k\,x^2+3\,x-7$ al variare di *k*.
Strategia risolutiva

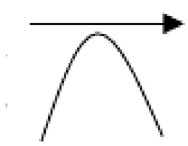
- 1° passo: prendiamo in considerazione il primo coefficiente e il discriminante dell’equazione associata $k\,x^2+3\,x-7=0$ e stabiliamo il loro segno:

I° coefficiente ≥ 0 per k ≥ 0
$\Delta=9+28k\geq 0$ per $k\geq-\frac{9}{28}$ e rappresentiamo la loro reciproca situazione:

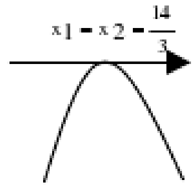


- 2° passo: analizziamo i valori del parametro nei vari intervalli determinati:

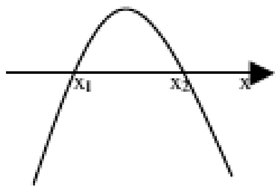
$k<-\frac{9}{28}$: Il primo coefficiente è negativo così come il Δ , la parabola volge la concavità verso il basso e non ha zeri reali: **il trinomio è negativo per qualunque valore reale di x.**



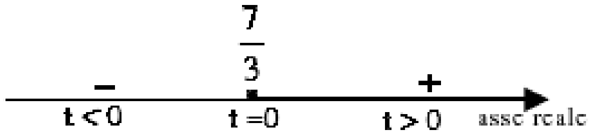
$k=-\frac{9}{28}$ Il primo coefficiente è negativo e $\Delta=0$ .La parabola volge la concavità verso il basso e ha due zeri reali coincidenti $x_1=x_2=\frac{14}{3}$: **il trinomio si annulla per** $x=\frac{14}{3}$ **mentre per qualunque altro valore di x è negativo.**



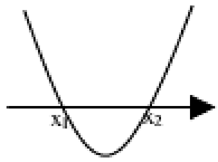
$-\frac{9}{28}<k<0$ Il primo coefficiente è negativo e Δ positivo. La parabola volge la concavità verso il basso e ha due zeri reali distinti: **il trinomio si annulla per** $x=x_1 \vee x=x_2$ **; è positivo per** $x_1<x<x_2$ **; è negativo per** $x<x_1 \vee x>x_2$



$k=0$ il trinomio diventa un binomio di primo grado: $t=3x-7$ e quindi $t>0$ per $x>\frac{7}{3}$, $t<0$ per $x<\frac{7}{3}$, $t=0$ per $x=\frac{7}{3}$.



$k>0$ Il primo coefficiente è positivo così come il Δ . La parabola volge la concavità verso l'alto e ha due zeri reali distinti: **il trinomio si annulla per** $x=x_1 \vee x=x_2$ **; è negativo per** $x_1<x<x_2$ **; è positivo per** $x<x_1 \vee x>x_2$



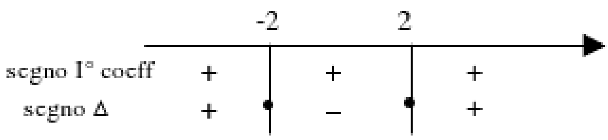
<u>Esempio</u>

Stabilite al variare del parametro *k* l'*I.S.* della disequazione $x^2+k\,x+1<0$

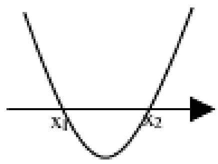
Strategia risolutiva

Prendiamo in considerazione il primo coefficiente e il discriminante dell'equazione associata $x^2+k\,x+1=0$ e stabiliamo il loro segno:

I° coefficiente: indipendente dal parametro e sempre positivo.
$\Delta=k^2-4\geq 0$ per $k\leq -2 \vee k\geq 2$ e rappresentiamo la loro reciproca situazione:



$k<-2 \vee k>2$ primo coefficiente. positivo e Δ positivo. La parabola volge la concavità verso l'alto e ha due zeri reali distinti: $x=x_1 \vee x=x_2$ **; il trinomio è negativo per** $x_1<x<x_2$



Risolvi e discuti le seguenti disequazioni

83 $x^2-2\text{kx}+k^2-1>0$ R. $x<k-1 \vee x>k+1$

84 $3x^2-5ax-2a^2<0$ R. $\begin{cases} a=0 \rightarrow impos. \\ a>0 \rightarrow -\frac{1}{3}a<x<2a \\ a<0 \rightarrow 2a<x<-\frac{1}{3}a \end{cases}$

85 $4x^2-4x+1-9m^2<0$ R. $\begin{cases} m=0\rightarrow impos. \\ m>0\rightarrow \frac{1-3m}{2}<x<\frac{1+3m}{2} \\ m<0\rightarrow \frac{1+3m}{2}<x<\frac{1-3m}{2}\end{cases}$

86 $2x^2-3ax<0$ R. $\begin{cases} a=0\rightarrow x\neq 0 \\ a>0\rightarrow 0<x<\frac{3}{2}a \\ a<0\rightarrow \frac{3}{2}a<x<0\end{cases}$

87 $x^2-2tx-8t^2>0$ R. $\begin{cases} t=0\rightarrow x\neq 0 \\ t>0\rightarrow -2t<x<4t \\ t<0\rightarrow 4t<x<-2t\end{cases}$

88 $(1-s)x^2+9>0$ R. $\begin{cases} s\leq 1\rightarrow I.S.=\mathbb{R} \\ s>1\rightarrow s<\frac{-3}{\sqrt{k-1}}\vee s>\frac{3}{\sqrt{k-1}}\end{cases}$

89 $(m-1)x^2-mx>0$ R. $\begin{cases} m=0\rightarrow I.S.=\emptyset \\ m=1\rightarrow x<0 \\ 0<m<1\rightarrow x<\frac{m}{m-1}\vee x>0 \\ m<0\vee m>1\rightarrow x<0\vee x>\frac{m}{m-1}\end{cases}$

90 $kx^2-(k+1)x-3\geq 0$

91 Determinare al variare del parametro m il segno del trinomio $t=(1-m)x^2-2mx-m+3$.

►5. Disequazioni polinomiali di grado superiore al secondo

Una disequazione polinomiale si presenta in una delle seguenti forme:
$p(x)\leq 0$ oppure $p(x)<0$ oppure $p(x)\geq 0$ oppure $p(x)>0$, dove $p(x)$ è un polinomio nella sola variabile *x*.

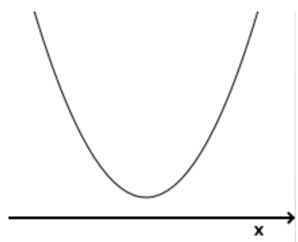
Problema

Un numero è tale che sottraendo al suo cubo il suo triplo si ottiene un numero maggiore del triplo del suo quadrato aumentato di 4. Determinare l'Insieme Soluzioni del problema.

La richiesta del problema implica la ricerca dell'**I**nsieme **S**oluzione della disequazione $x^3-3x>3x^2+4$, di terzo grado nella variabile *x*.

Strategia risolutiva:

- scriviamo la disequazione in forma canonica, applicando i principi di equivalenza: $x^3-3x^2-3x-4>0$; si tratta di una disequazione polinomiale di terzo grado.
- procediamo nella ricerca della scomposizione in fattori del polinomio $p(x)=x^3-3x^2-3x-4$
  Mediante la regola di Ruffini possiamo determinare un suo zero $x=4$ e dunque ottenere $p(x)=x^3-3x^2-3x-4=(x-4)(x^2+x+1)$
- determiniamo il segno dei singoli fattori:
  - primo fattore $f_1>0 \rightarrow x>4$
  - secondo fattore $f_2>0 \rightarrow x^2+x+1>0$ disequazione di secondo grado, I° coefficiente positivo e $\Delta=1-4=-3$



		4		*x*
Segno f_1	–		+	
Segno f_2	+		+	
Segno p	–		+	

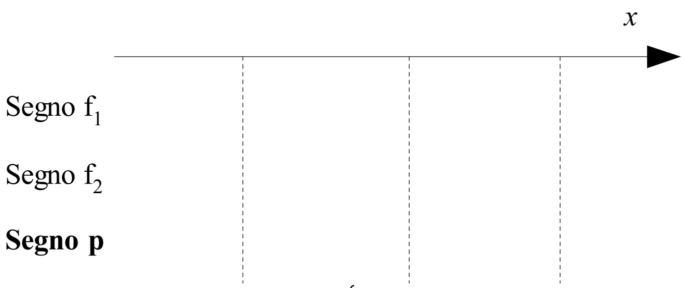
negativo; la parabola è del tipo rappresentato in figura e dunque il secondo fattore è positivo per qualunque valore reale di x

- costruiamo la tabella dei segni:
- determiniamo l'*I.S.*: $I.S\,, = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} = (4\,; +\infty)$; il problema ha dunque infinite soluzioni.

92 Determinate l'*I.S.* della disequazione $-2x(3-2x)-3x^2\left(2-\frac{5}{2}x\right) \geq 5\left(2x^2-\frac{3}{10}x\right)$

Osserviamo che la disequazione proposta è polinomiale e di grado 3; eseguiamo i calcoli per portarla alla forma $p(x) \geq 0$

- eseguendo i calcoli e applicando i principi di equivalenza verificare che si ottiene $5x^3-8x^2-3x \geq 0$
- scomporre in fattori il polinomio $p(x)=5x^3-8x^2-3x = x\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$
- determinare il segno dei singoli fattori:
  - primo fattore $f_1 \geq 0 \rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$
  - secondo fattore $f_2 \geq 0 \rightarrow 5x^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \geq 0$ disequazione di secondo grado con 1° coefficiente …………… e $\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots$; la parabola è del tipo ……………… dunque $x_1 = \ldots\ldots \vee x_2 = \ldots\ldots$ e il secondo fattore è positivo per …………………………..
- costruire la tabella dei segni:



- verificare che si ottiene $I.S. = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{4-\sqrt{31}}{5} \leq x \leq 0 \vee x \geq \frac{4+\sqrt{31}}{5}\right\}$

93 Verificare che nessun numero naturale appartiene all'Insieme Soluzione della disequazione: $(x^2-x)\cdot(2x^2+13x+20)<0$; c'è qualche numero intero nell'*I.S.*? È vero che l'*I.S.* è formato dall'unione di due intervalli aperti di numeri reali?

94 Dopo aver scomposto in fattori il polinomio $p(x)=2x^4-5x^3+5x-2$ determinare il suo segno.

Strategia risolutiva:

- *primo modo*: uno zero intero del polinomio è $x=1$ quindi si procede alla scomposizione mediante la regola di Ruffini … … ...
- *secondo modo*: si procede iniziando con un raccoglimento parziale $p(x)=2x^4-5x^3+5x-2 = 2\cdot(x^4-1)-5x\cdot(x^2-1) = 2\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-1)-5x\cdot(x^2-1)$ e poi con il raccoglimento a fattor comune $p(x)=(x^2-1)\cdot(2x^2-5x+2)$
- Potete ora procedere autonomamente allo studio del segno dei singoli fattori ottenuti … … … ...

- completare le proposizioni:
  $p(x)>0$ per ……………………………
  $p(x)=0$ per ……………………………
  $p(x)<0$ per ……………………………

95 Stabilire se esiste almeno un numero naturale che renda negativo il trinomio $p(x)=9x^2+x^4-10$.

96 Nell'insieme dei valori reali che rendono positivo il trinomio $p(x)=2x^5-12x^3-14x$, vi sono solo due numeri interi negativi?

97 $x\in(-1;+\infty) \rightarrow p(x)=x^5-2x^2-x+2>0$ Vero o falso?

98 Determinate *I.S.* della disequazione: $(x^4-4x^2-45)\cdot(4x^2-4x+1)>0$

99 All'insieme dei valori reali che rendono negativo il polinomio $p(x)=(2x-1)^3-(3-6x)^2$ appartiene un valore razionale che lo annulla. Vero o falso?

100 $(1-x)(2-x)(3-x)>0$ R. $2<x<3 \vee x>1$

101 $(2x-1)(3x-2)(4x-3)\leq 0$ R: $\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{3}{4} \vee x\leq\frac{1}{2}$

102 $-2x(x-1)(x+2)>0$ R: $x<-2 \vee 0<x<1$

103 $3x(x-2)(x+3)(2x-1)\leq 0$ R: $\frac{1}{2}\leq x\leq 2 \vee -3\leq x\leq 0$

104 $(x^2+1)(x-1)(x+2)>0$ R: $x<-2 \vee x>1$

105 $(1-9x^2)(9x^2-3x)2x>0$ R: $x<-\frac{1}{3}$

106 $(16x^2-1)(x^2-x-12)>0$ R: $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4} \vee x<-3 \vee x>4$

107 $-x(x^2-3x-10)(x^2-9x+18)\leq 0$ R: $3\leq x\leq 5 \vee -2\leq x\leq 0 \vee x\geq 6$

108 $x^2(x-1)(2x^2-x)(x^2-3x+3)>0$ R: $0<x<\frac{1}{2} \vee x>1$

109 $(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3x)>0$ R: $x<-\sqrt{2} \vee 1<x<\sqrt{2} \vee -1<x<0 \vee x>3$

110 $x^3-x^2+x-1>0$ R: $x>1$

111 $x^3-5x^2+6<0$ R: $3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3} \vee x<-1$

112 $(5x^3-2x^2)(3x^2-5x)\geq 0$ R: $0\leq x\leq\frac{2}{5} \vee x\geq\frac{5}{3}$

113 $x^4-2x^3-x+2>0$ R: $x<1 \vee x>2$

114 $x^4+x^2-9x-9\leq 0$ R: $-3\leq x\leq 3$

115 $25x^4-9>0$ R: $x<-\frac{\sqrt{15}}{5} \vee x>\frac{\sqrt{15}}{5}$

116 $x^3-1\geq 2x(x+1)$ R: $x\geq 1$

117 $x^4-1>x^2+1$ R: $x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2}$

118 $(x^2+x)^2+2(x+1)^2\geq 0$ R: $\mathbb{R}$

►6. Disequazioni fratte

Ricordiamo la

DEFINIZIONE: una disequazione è **frazionaria** o **fratta** quando il suo denominatore contiene l'incognita.

Conosciamo, per averla applicata alle disequazioni fratte con termini di primo grado, la
procedura per determinare I.S. (Insieme Soluzione) di una disequazione frazionaria (fratta)

- 1° passo: applicando il primo principio si trasportano tutti i termini nel primo membro;
- 2° passo: si calcola l'espressione al primo membro conducendo la disequazione alla forma $\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$;
- 3° passo: si studia il segno del numeratore e del denominatore, ponendo N(x)>0 oppure N(x)≥ 0 (a secondo della richiesta) con D(x)>0;
- 4° passo: si costruisce la tabella dei segni, segnando con un punto ingrossato gli zeri della frazione, se richiesti;
- 5° passo: si individuano gli intervalli in cui la frazione assume il segno richiesto.

Vediamo attraverso alcuni esempi come procedere con le conoscenze raggiunte nello studio delle disequazioni di secondo grado.

Problema

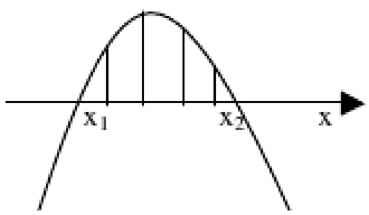
Determinare, al variare di x in R, il segno dell'espressione $E = \frac{4}{4x^2-1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{x}{1-2x}$

Osservazioni preliminari:

- l'espressione assegnata è frazionaria, quindi lo studio del segno deve essere circoscritto ai valori di x del Dominio dell'espressione stessa.
- studiare il segno di una espressione letterale significa stabilire in quale insieme si trovano i valori della variabile che la rendono positiva, negativa, nulla.
- ogni espressione contenente operazioni tra frazioni algebriche ha in generale come risultato una frazione algebrica.

Strategia risolutiva:

- 1° passo: determiniamo il risultato dell'operazione assegnata: $E = \frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)}$
- 2° passo: determiniamo il **D**ominio di **E**: C.E. $2x+1 \neq 0 \wedge 2x-1 \neq 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$
- 3°passo: per studiare il segno impostiamo la disequazione: $\frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)} \geq 0$ che ci permetterà di rispondere al quesito posto dal problema
- 4° passo: studiamo il segno del numeratore e del denominatore:
  segno N: $-2x^2+x+3 \geq 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata $-2x^2+x+3=0$, calcoliamo il discriminante: $\Delta = 1+24 = 25$, positivo per cui si hanno due soluzioni reali distinte; la parabola rappresentativa $y = -2x^2+x+3$ è del tipo in figura per cui essendo $x_1 = -1$ e $x_2 = \frac{3}{2}$ si ha $N \geq 0$ per $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$



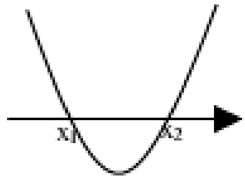
  segno D: il denominatore è composto da due fattori di primo grado, quindi $d_1 > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$; $d_2 > 0$ per $x > \frac{1}{2}$
- 5° passo: Costruiamo la tabella dei segni:

		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
segno N	−	•	+		+		+	•	−
segno d_1	−		−		+		+		+
segno d_2	−		−		−		+		+
segno E	−		+		−		+		−

Dalla tabella dei segni possiamo ottenere la risposta al problema posto:

- l’espressione E si annulla per $x=-1 \vee x=\frac{3}{2}$
- l’espressione E è positiva per $x \in I=\left\{x \in \mathbb{R} \left| -1<x<-\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$
- l’espressione E è negativa per $x \in I=\left\{x \in \mathbb{R} \left| x<-1 \vee -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \vee x>\frac{3}{2}\right.\right\}$

Osserviamo che **il segno del denominatore** si può determinare riconoscendolo come polinomio di secondo grado con due zeri reali e dunque rappresentabile con una parabola del tipo in figura per cui possiamo affermare $D>0$ per $x<-\frac{1}{2} \vee x>\frac{1}{2}$ in cui sono rispettate le C.E.



Con questo procedimento la tabella dei segni sarebbe modificata nel modo seguente lasciando inalterato il risultato.

		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
segno N	−	•	+		+		+	•	−
segno D	+		+		−		+		+
segno E	−		+		−		+		−

119 Determinare l’Insieme Soluzione della disequazione fratta: $3-\frac{1}{2x+1} \geq \frac{1}{1-x}$.

- 1° passo: trasportiamo al primo membro la frazione del secondo membro, applicando il primo principio delle disequazioni: $3-\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{1-x} \geq 0$
- 2° passo: eseguite i calcoli ……………………………………………………….. trasformando il primo membro in una **frazione** algebrica; verificate che si ottiene: $\frac{-6x^2+2x+1}{(2x+1)\cdot(1-x)} \geq 0$
- 3° passo: studiate il segno del numeratore e del denominatore:
  segno N: $-6x^2+2x+1 \geq 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall’equazione associata $-6x^2+2x+1=0$, calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=7$, positivo per cui si hanno due soluzioni …………………. ; la parabola rappresentativa $y=-6x^2+2x+1$ è del tipo …………………… per cui essendo $x_1=$……… e $x_2=$……… si ha $N \geq 0$ per ………$\leq x \leq$………
  segno D: $(2x+1)\cdot(1-x)>0$ disequazione di secondo grado; il denominatore ha due zeri reali $x=-\frac{1}{2}$ e $x_2=1$ e la parabola rappresentativa volge la concavità verso il basso; ……………… pertanto si ha $D>0$ per ……………… che rispetta le C.E.: $x_1 \neq -\frac{1}{2} \wedge x_2 \neq 1$
- 4° passo: completate la tabella dei segni:

		$-\frac{1}{2}$							
segno N				•		•			
segno D									
segno frazione									

- 5° passo: controllate che $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x<-\frac{1}{2}\vee\frac{1-\sqrt{7}}{6}<x<\frac{1+\sqrt{7}}{6}\vee x>1\right\}$

120 Determinate per quali valori reali la frazione $f=\dfrac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}$ risulta **non superiore** a 1.

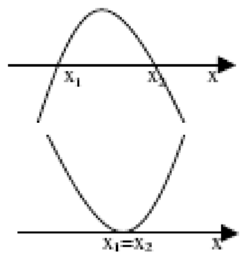
Osserviamo che il problema chiede di determinare l'I.S. della disequazione fratta $\dfrac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}\leq 1$

equivalente a $\dfrac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}-1\leq 0$

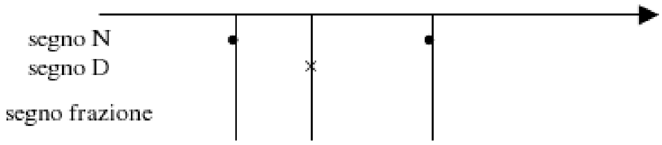
- 1° passo: eseguite i calcoli per condurre la disequazione alla forma $f\leq 0$: ……………………..
- 2° passo: verificato che si ottiene $\dfrac{-3x^2+14x-8}{(2x-3)^2}\leq 0$, procedete nella ricerca del

  segno N: $-3x^2+14x-8\geq 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata ……………, essendo il discriminante $\Delta=$……… positivo, si hanno due soluzioni ………………………; la parabola rappresentativa è del tipo in figura per cui $N\geq 0$ per ………$\leq x\leq$………

  segno D: il polinomio al denominatore è un quadrato di binomio; l'equazione associata ha due zeri reali coincidenti $x_1=x_2=$………… e la parabola rappresentativa è del tipo, quindi $D>0$ per per $x\neq$……



- 3° passo: costruite la tabella dei segni



- 4° passo: *I.S.* = ……………………………………………

121 Attribuite il valore di verità alla proposizione: "Per qualunque valore reale la frazione algebrica $f=\dfrac{2x^2+7x+8}{2x^2-4x+2}$ assume segno positivo."

Osserviamo che per rispondere alla richiesta del problema dobbiamo determinare il segno della frazione assegnata e dunque risolvere la disequazione: $\dfrac{2x^2+7x+8}{2x^2-4x+2}>0$.

Determinate il

segno N: $2x^2+7x+8>0$ disequazione di secondo grado dunque $\Delta=$……… e parabola del tipo ………………………….. per cui $N>0$ per ………………………

segno D: $2x^2-4x+2>0\ \rightarrow\ 2(x-1)^2>0$ disequazione di secondo grado dunque $\Delta=$……… e parabola del tipo ……………………………… per cui $D>0$ per …………………

Dai risultati ottenuti e dall'analisi della tabella dei segni si deduce $f>0$ per ………….. , quindi la proposizione è ……………

122 Date chiare e sintetiche motivazioni alla verità della seguente proposizione: "il segno della frazione $f=\dfrac{9-x^2+3x}{2+x^2}$ non è mai positivo e la frazione non ha zeri reali".

123 Stabilite se basta la condizione $x\neq 1\wedge x\neq -1$ per rendere positiva la frazione $f=\dfrac{x^3-1}{x^4-2x^2+1}$

124 Assegnate le due funzioni $f_1=\dfrac{x^2+1}{2x-x^2}$ e $f_2=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}$ stabilite per quali valori della variabile indipendente si ha $f_1\geq f_2$. R. $-1-\sqrt{2}\leq x<0\vee -1+\sqrt{2}\leq x<2$

125 La disequazione $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}<\frac{2x+1}{x^2-1}$ è verificata per

[A] $-\sqrt{2}<x<-1 \vee 1<x<2$ [B] $x<-\sqrt{2} \vee -1<x\leq 0 \vee 1<x<\sqrt{2}$

[C] $x<-\sqrt{2} \vee -1<x<0 \vee 1<x<\sqrt{2}$ [D] $x\leq -\sqrt{2} \vee -1<x<\sqrt{2}$

126 Spiegate perché l'espressione letterale $E=\frac{1-\frac{x^2}{x^2-1}}{2+\frac{3x-1}{1-x}}$ nel suo Dominio è sempre positiva.

127 Determinate i valori di x per cui la funzione $y=\frac{(x-1)\cdot x-2}{5x^2-x-4}$ è maggiore o uguale a 1.

R. $-\frac{3}{2}\leq x<-\frac{4}{5}$

128 x, x+2, x+4 sono tre numeri naturali. Determinate **in N** il più piccolo numero che rende vera la proposizione: "il doppio del primo aumentato del prodotto degli altri due è maggiore della differenza tra il doppio del terzo e il quadrato del secondo" R. 5

129 *Determinate l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte*

130 $\frac{x+2}{x-1}>0$ $I.S.=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$

131 $\frac{x+2}{x-1}>0$ $I.S.=(-3,4)$

132 $\frac{x+5}{x-7}>0$ $I.S.=(-\infty;-5)\cup(7;+\infty)$

133 $\frac{2-4x}{3x+1}\geq 0$ $I.S.=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

134 $\frac{x^2-4x+3}{4-7x}\geq 0$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x<\frac{4}{7}\vee 1\leq x\leq 3\right\}$

135 $\frac{x^2-x-2}{-3x^2+3x+18}\leq 0$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}|\ x<-2 \vee -1<x<2 \vee x>3\}$

136 $\frac{x^2-1}{x-2}>0$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}|\ -1<x<1 \vee x>2\}$

137 $\frac{x+2}{x-1}>0$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}|\ x<-5 \vee 1<x<3\}$

138 $\frac{-x^2+4x-3}{x+5}>0$ $I.S.=(-4;-2)\cup(-1;+\infty)$

139 $\frac{x^2-8x+15}{x^2+3x+2}>0$ $I.S.=(-\infty;-2)\cup(-1;3)\cup(5;+\infty)$

140 $\frac{x^2+1}{x^2-2x}>0$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}|\ x<0 \vee x>2\}$

141 $\frac{4-x^2+3x}{x^2-x}>0$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}|\ -1<x<0 \vee 1<x<4\}$

142 $\frac{4-x^2+3x}{x^2-x}>0$ $I.S.=(-2;2)$

143 $\frac{x+5}{x^2-25}>0$ $I.S.=(5;+\infty)$

144 $\frac{x^2-2x}{5-x^2}>0$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}|\ -\sqrt{5}<x<0 \vee 2<x<\sqrt{5}\}$

145 $\frac{4x+7}{3x^2-x-2}>0$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{7}{4}<x<-\frac{2}{3}\vee x>1\right\}$

146 $\dfrac{9-x^2}{2x^2-x-15}>0$ $\qquad I.S.=\left(-3;-\dfrac{5}{2}\right)$

147 $\dfrac{-x^2-4x-3}{6x-x^2}>0$ $\qquad I.S.=(-\infty;-3)\cup(-1;0)\cup(6;+\infty)$

148 $\dfrac{x^2-7x}{-x^2-8}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<7\}$

149 $\dfrac{1}{x^2+2x+1}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}-\{-1\}\}$

150 $\dfrac{-3}{-x^2-4x-8}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\}$

151 $\dfrac{x^2+2x+3}{-x^2-4}>0$ $\qquad I.S.=\emptyset$

152 $\dfrac{3x-12}{x^2-9}>0$ $\qquad I.S.=(-3;3)\cup(4;+\infty)$

153 $\dfrac{5-x}{x^2-4}>0$ $\qquad I.S.=\emptyset$

154 $\dfrac{3x-x^2-2}{2x^2+5x+3}>0$ $\qquad I.S.=\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)\cup(1;2)$

155 $\dfrac{4-2x}{x^2-2x-8}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2\ \vee\ 2<x<4\}$

156 $\dfrac{5x+x^2+4}{6x^2-6x}>0$ $\qquad I.S.=(-\infty;-4)\cup(-1;0)\cup(1;+\infty)$

157 $\dfrac{x^2-4x+3}{5-10x}>0$ $\qquad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x<\dfrac{1}{2}\ \vee\ 1<x<3\right\}$

158 $\dfrac{x^2+4x+3}{3x-6}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid -3\mathrm{x}<-1\ \vee\ x>2\}$

159 $\dfrac{x^2+3x+10}{4-x^2}>0$ $\qquad I.S.=(-2;2)$

160 $\dfrac{x^2-3x+2}{4x-x^2-5}>0$ $\qquad I.S.=(1;2)$

161 $\dfrac{x^2-9}{x^2-5x}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-3\ \vee\ 0<x<3\ \vee\ x>5\}$

162 $\dfrac{2x+8}{x^2+4x-12}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid -6<x<-4\ \vee\ x>2\}$

163 $\dfrac{x^2+2}{25-x^2}>0$ $\qquad I.S.=(-5;5)$

164 $\dfrac{3x^2-2x-1}{4-2x}>0$ $\qquad I.S.=\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;2)$

165 $\dfrac{x^2-2x-63}{4x+5-x^2}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid -7<x<-1\ \vee\ 5<x<9\}$

166 $\dfrac{x^2-2x-63}{4x+5-x^2}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid x>3\}$

167 $\dfrac{x+2}{x^2+4x+2}>0$ $\qquad I.S.=(2:+\infty)$

168 $\dfrac{5-x}{x^2-4x+3}>0$ $\qquad I.S.=(-\infty;1)\cup(3;5)$

169 $\dfrac{3+4x}{-x^2+5x-4}>0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x<-\dfrac{3}{4}\ \vee\ 1<x<4\right\}$

170 $\dfrac{x^2-5x+6}{-3x+7}<0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\dfrac{7}{3}<x<2\ \vee\ x>3\right\}$

171 $\dfrac{-x^2+2x+8}{-x-1}<0$ $\quad I.S.=(-\infty;-2)\cup(-1;4)$

172 $\dfrac{x^2+3x+2}{25-x^2}>0$ $\quad I.S.=(-5;-2)\cup(-1;5)$

173 $\dfrac{x^2-x-2}{x-x^2+6}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|-2<x<-1\ \vee\ 2<x<3\}$

174 $\dfrac{9-x^2}{x^2+5x+6}<0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|x<-3\ \vee\ -3<x<-2\ \vee\ x>3\}$

175 $\dfrac{6x-2x^2}{4-x^2}>0$ $\quad I.S.=(-\infty;-2)\cup(0;2)\cup(3,+\infty)$

176 $\dfrac{2x-4x^2}{x^2+x-12}<0$ $\quad I.S.=(-\infty;-4)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty)$

177 $\dfrac{16-x^2}{5x-x^2}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|x<-4\ \vee\ 0<x<4\ \vee\ x>5\}$

178 $\dfrac{1-x^2}{x^2+2x+3}<0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|x<-1\ \vee\ x>1\}$

179 $\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}>0$ $\quad I.S.=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

180 $\dfrac{8-2x^2}{3x-x^2+4}<0$ $\quad I.S:=(-2;-1)\cup(2;4)$

181 $\dfrac{6x^2-6}{100x^2+100x}<0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|0<x<1\}$

182 $\dfrac{1+x^2}{3x^2+x}<0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\dfrac{1}{3}<x<0\right\}$

183 $\dfrac{x^2+3x+3}{4x^2+3}>0$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

184 $\dfrac{125+4x^2}{128+2x^2}<0$ $\quad I.S.=\emptyset$

185 $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4x+3}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|x<-2\ \vee\ -2<x<1\ \vee\ x>3\}$

186 $\dfrac{x^2-5x+8}{x^2-2x+1}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|x<1\ \vee\ x>1\}$

187 $\dfrac{4x-3}{x+6}>0$ $\quad I.S.=(-\infty;-6)\cup\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$

188 $\dfrac{-2x+1}{3x-x^2}>0$ $\quad I.S.=(-\infty;-6)\cup\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$

189 $\dfrac{-2x+1}{3x-x^2}>0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x<5\ \vee\ x>-\dfrac{1}{2}\right\}$

190 $\dfrac{4x^2-3x}{x^2-2x-8}<0$ $\quad I.S.=(-2;0)\cup\left(\dfrac{3}{4};4\right)$

191 $\dfrac{4x-x^2+5}{x^2-9x+20}<0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|x<-1\ \vee\ 4<x<5\ \vee\ x>5\}$

192 $\frac{5+2x}{-2x^2+14x+16}<0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\left|-\frac{5}{2}<x<-1\ \vee\ x>8\right.\right\}$

193 $\frac{5x-2x^2-10}{x^2+3x-28}>0$ $\quad I.S:=(-7;4)$

194 $\frac{x^2-6x+9}{8x-7x^2}>0$ $\quad I.S:=\left(0;\frac{8}{7}\right)$

195 $\frac{3x^2+2x-8}{6x^2+19x+15}<0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\left|-2<x<-\frac{5}{3}\ \vee\ -\frac{3}{2}<x<\frac{4}{3}\right.\right\}$

196 $\frac{3x^2-5x-2}{4x^2+8x-5}>0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\left|x<-\frac{5}{2}\ \vee\ -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\ \vee\ x>2\right.\right\}$

197 $\frac{4x-4}{2x^2-3x+2}<0$ $\quad I.S.=(-\infty;1)\cup(1;2)$

198 $\frac{2x-4}{2x^2-3x-14}>0$ $\quad I.S.=\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$

199 $\frac{-7x+6}{x^2+10x+25}<0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\left|x>\frac{6}{7}\right.\right\}$

200 $\frac{-3+3x}{x^3-4x^2}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\ |x<0\ \vee\ 4<x<5\ \vee\ 0<x<1\ \vee\ x>4\}$

►7. Sistemi di disequazioni

Problema

Nell'equazione $x^2-(k-3)x+k^2-3k+1=0$ *, determinare per quali valori del parametro k si ottengono soluzioni reali e concordi.*

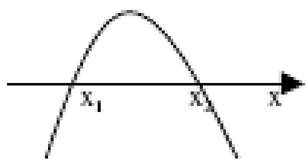
Abbiamo già affrontato un simile problema discutendo le equazioni parametriche di secondo grado e dunque sappiamo che la richiesta del problema esige che il discriminante (Δ) sia non negativo affinché le soluzioni siano reali e che il prodotto delle stesse sia positivo. Pertanto il problema è formalizzato con un **sistema di disequazioni:** $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ \frac{c}{a}>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}k^2-6k+9-4k^2+12k-4\geq 0\\ k^2-3k+1>0\end{cases}$

Risolvere il sistema significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono le soluzioni comuni alle disequazioni che lo compongono.

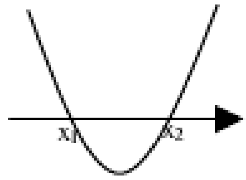
Risolviamo separatamente le due disequazioni del sistema; indicati con I.S.$_1$ e I.S.$_2$ rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda disequazione, l'insieme soluzione del sistema è dato da

$\boldsymbol{I.S.=I.S._1\cap I.S._2}$ (insieme intersezione degli insieme soluzione delle due disequazioni).

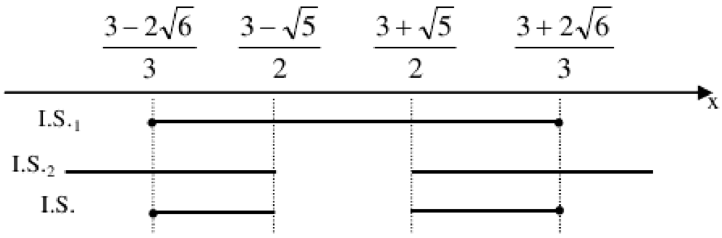
- $d_1:-3k^2+6k+5\geq 0$ disequazione di secondo grado avente I° coefficiente negativo e $\frac{\Delta}{4}=24$ positivo; la parabola rappresentativa è del tipo rappresentata in figura con $x_1=\frac{3-2\sqrt{6}}{3}\ \vee\ x_2=\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$ quindi $I.S._1=\left\{x\in\mathbb{R}\left|\frac{3-2\sqrt{6}}{3}\leq x\leq\frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right.\right\}$



- $d_2 :\ k^2 - 3k + 1 > 0$ disequazione di secondo grado avente I° coefficiente positivo e $\Delta = 5$ positivo; la parabola rappresentativa è è del tipo rappresentata in figura con
$x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ quindi
$I.S._1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$



Per determinare l'**I**nsieme **S**oluzione del sistema rappresentiamo in un grafico gli insiemi soluzioni delle disequazioni risolte e visualizziamo l'insieme formato dai valori che soddisfano contemporaneamente sia l'una che l'altra: sull'asse reale depositiamo i valori numerici trovati e rappresentiamo su righe distinte i due insiemi soluzione: gli intervalli in cui cadono soluzioni della prima e della seconda disequazione rappresentano l'Insieme Soluzione del sistema.



$$I.S._1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{3-2\sqrt{6}}{3} \le x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le \frac{3+2\sqrt{6}}{3} \right\} = \left[\frac{3-2\sqrt{6}}{3} ; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} ; \frac{3+2\sqrt{6}}{3} \right]$$

<u>Problema</u>

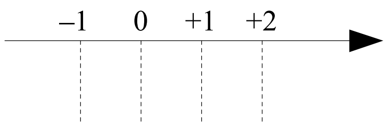
Esiste qualche valore reale per cui le due funzioni $f_1 = x^4 - x^3 + x - 1$ *;* $f_2 = x^4 - 8x$ *assumono valore positivo?*

Il problema è formalizzato nel **sistema di disequazioni**: $\begin{cases} x^4 - x^3 + x - 1 > 0 \\ x^4 - 8x > 0 \end{cases}$

Essendo le disequazioni polinomiali passiamo attraverso la scomposizione in fattori per determinarne la soluzione

- $d_1 :\ x^4 - x^3 + x - 1 \ = \ x^3(\ldots\ldots\ldots) + (x-1) \ = \ (x-1)\cdot(x+1)\cdot(\ldots\ldots\ldots) > 0$
completate applicando il procedimento che preferite ………………………………………
……………………………………………………………………………………………. e verificate che risulta $I.S._1 = (-\infty ; -1) \cup (1 ; +\infty)$
- $d_2 :\ x^4 - 8x \ = \ x\cdot(\ldots\ldots - 8) \ = \ x\cdot(\ldots\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots) > 0$ completate applicando il procedimento che preferite ……………………………………………………………………….…………
……………………………………………………………………………………. e verificate che risulta $I.S._1 = (-\infty ; 0) \cup (2 ; +\infty)$

Completate lo schema per determinare l'insieme soluzione del problema.



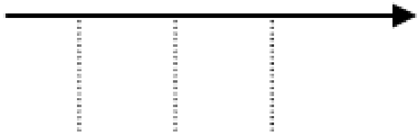
$I.S. =$………………… . Attribuite il valore di verità alla proposizione:" 3 è il primo numero naturale che rende positive entrambe le funzioni assegnate".

Dallo schema ottenuto potete anche ricavare l'insieme dei valori reali che rendono entrambe le funzioni negative? Se la risposta è sì, datene la rappresentazione come intervallo numerico. ………………………….

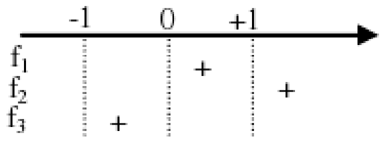
201 Determinate l'insieme soluzione del sistema: $\begin{cases} 2x^3-9x^2+10x-3\leq 0 \\ \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x}\geq 0 \\ 3-4x<0 \end{cases}$

Il sistema è formato da tre disequazioni; risolviamo separatamente ciascuna disequazione:

- $2x^3-9x^2+10x-3\leq 0$ di terzo grado, quindi procediamo alla scomposizione in fattori del polinomio al primo membro. Applicando la regola del resto si determina $x=1$ come zero intero del polinomio; con la regola di Ruffini procedete alla scomposizione e verificate che risulta: $d_1:\ (x-1)\cdot(2x^2-7x+3)\leq 0$ studiate il segno dei singoli fattori:
  - $f_1:\ x-1\geq 0\ \rightarrow$ ....
  - $f_2:\ 2x^2-7x+3\geq 0$ di secondo grado con il I° coefficiente .... e $\Delta=$........ positivo, quindi $x_1=$........ $\vee\ x_2=$........ e $f_2\geq 0$ per ....
  - costruite la tabellina dei segni e determinate $I.S._1$



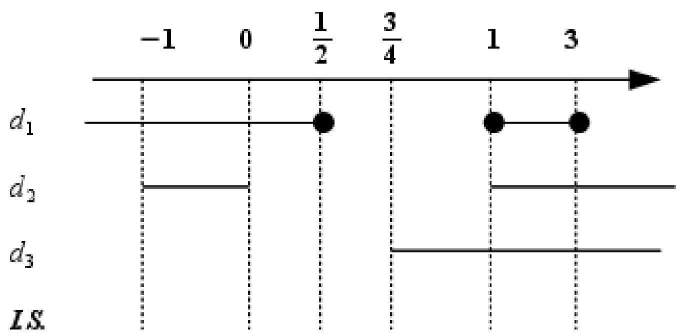
- $d_2:\ \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x}\geq 0$ disequazione fratta, quindi determiniamo il segno del numeratore e quello del denominatore
  - $N:\ x^2+x+1\geq 0$ di secondo grado col I° coefficiente ....e $\Delta=$........ negativo, quindi la parabola rappresentativa è ....e dunque N > 0 per qualunque x reale, mai uguale a zero.
  - $D:\ x^3-x=x\cdot(x^2-1)>0\ \rightarrow\ x\cdot(x+1)\cdot(x-1)>0$ e studiando il segno dei singoli fattori
    $f_1:\ x>0$
    $f_2:\ x+1>0\ \rightarrow\ x$........
    $f_3:\ x-1>0\ \rightarrow\ x$........



  e completando la tabella dei segni otteniamo $D>0$ per $-1<x<0\ \vee\ x>1$
  completiamo con la ricerca dell' $I.S._2$: essendo il numeratore positivo per qualunque valore reale, la frazione è positiva quando è positivo il denominatore, quindi $I.S._2=\{$.............................$\}$

- Infine risolviamo $d_3:\ 3-4x<0$ di primo grado per cui $x>\dfrac{3}{4}$

Ricordiamo che la ricerca dell'Insieme Soluzione del sistema si effettua determinando l'insieme $I.S._1\cap I.S._2\cap I.S._3$ individuabile attraverso il grafico:



Scegli la risposta corretta:

[A] $1\leq x<3$ [B] $1<x<3$ [C] $1<x<3$ [D] $1\leq x\leq 3$

202 Verificate che l'insieme soluzione del sistema: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x-3} \\ 3x-1-2x^2<0 \\ \dfrac{x^2-6x+5}{2-x}>0 \end{cases}$ è $I.S.=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,3)$

203 Determinate l'insieme dei valori reali che rendono vera la proposizione composta
p: " $x^3-5x^2-14x\geq 0 \wedge \dfrac{2x+1}{2x}>\dfrac{3}{x+1}$ " $I.S.=(-1,0)$

204 Determinate l'Insieme Soluzione del sistema: $\begin{cases} x^4-8\geq 1 \\ \dfrac{5-x}{x}<\dfrac{1}{2} \\ x^3-1<0 \end{cases}$ $I.S.=\emptyset$

205 Per determinare qualche soluzione del sistema $\begin{cases} x(x-3)>3\left(\dfrac{x^2}{2}-2x\right) \\ 2+x\cdot\dfrac{3x-7}{3}\geq 5-\dfrac{1}{3}x \end{cases}$ basta l'insieme N dei naturali? Se la risposta è affermativa, esprimi per elencazione gli elementi dell'Insieme Soluzione. $I.S.=\{3,4,5\}$

206 $\begin{cases} x^2-4>0 \\ x-5\leqslant 0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-2 \vee 2<x\leqslant 5\}$

207 $\begin{cases} x^2-4x+3\leqslant 0 \\ x-2x^2<-10 \end{cases}$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{5}{2}<x\leqslant 3\right\}$

208 $\begin{cases} 4x-x^2>0 \\ 3x^2(x-3)>0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 3<x<4\}$

209 $\begin{cases} x^2+5x+6\leqslant 0 \\ 2x+5\leqslant 0 \end{cases}$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, -3\leq x\leq -\dfrac{5}{2}\right\}$

210 $\begin{cases} 3x-x^2-2\leqslant 0 \\ x^2>49 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-7 \vee x>7\}$

211 $\begin{cases} 3x-2>0 \\ x^2-1>0 \\ 2x-x^2<0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x>2\}$

212 $\begin{cases} x^2-4x+4\geqslant 0 \\ x<6 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<6\}$

213 $\begin{cases} x^2-4x+4>0 \\ x\leqslant 6 \\ 1-x^2\leqslant 0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -1 \vee 1\leq x<2 \vee 2<x\leq 6\}$

214 $\begin{cases} x^2+6x+9<0 \\ x<2 \\ x^2+1>0 \end{cases}$ $I.S.=\emptyset$

215 $\begin{cases} x^2+6x+9\leqslant 0 \\ x<2 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=-3\}$

216 $\begin{cases} 4x-x^2-3<0 \\ 3x\geqslant 2 \end{cases}$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{2}{3}\leq x<1 \vee x>3\right\}$

217 $\begin{cases} 2x^2<8 \\ -x^2+5x>-6 \\ x^2(9-x^2)\leqslant 0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=0\}$

218 $\begin{cases}(x^2-4x+3)(2x-4)>0\\2x-x^2\leqslant 1\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 1<x<2 \vee x>3\}$

219 $\begin{cases}(3-x)(x^2-4)(x^2-2x-8)<0\\x^2-64\leqslant 0\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x<3 \vee 4<x\leq 8\}$

220 $\begin{cases}2x^2-x-1\leqslant 0\\3x+7>0\\x^2-10x+9\leqslant 0\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=1\}$

221 $\begin{cases}2x^2-x-1<0\\3x+7>0\\x^2-10x+9\leqslant 0\end{cases}$ $I.S.=\emptyset$

222 $\begin{cases}x^2-10x+25>0\\x<7\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<5 \vee 5<x<7\}$

223 $\begin{cases}x^2-10x+25\geqslant 0\\x<7\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<7\}$

224 $\begin{cases}x^2-4x+3\leq 0\\x^2-4>0\\x^2+1>0\\x-1>0\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x\leq 3\}$

225 $\begin{cases}x^2-5x+6\leq 0\\x^2-1>0\\x^2+1<0\\x-1>0\end{cases}$ $I.S.=\emptyset$

226 $\begin{cases}x^2-2x+1\geq 0\\x^2+5x\geq 0\\x^2+1>0\\x^2-2x+7>0\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -5 \vee x\geq 0\}$

227 $\begin{cases}x^2-2x+1>0\\x^2+5x\geq 0\\x^2+x+23>0\\x^2-2x+7>0\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -5 \vee 0\leq x<1 \vee x>1\}$

228 $\begin{cases}x^2-3x+2>0\\x^2-3x+2<0\\2x^2-x-1>0\\x^2-2x>0\end{cases}$ $I.S.=\emptyset$

229 $\begin{cases}x^2-3x+2\leq 0\\x^2-4x+4\leq 0\\x^2-x+10>0\\x^2-2x\leq 0\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=2\}$

230 $\begin{cases}x^2-3x+2\leq 0\\x^2-4x+4\leq 0\\x^2-3x+2\geq 0\\x^2-4x+4\geq 0\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=2\}$

Autori

Cristina Mocchetti: teoria, esercizi
Gemma Fiorito: teoria
Francesco Daddi: esercizi
Germano Pettarin: esercizi
Alessandro Albertini: esercizi
Claudio Carboncini: coordinamento, trascrizione
Antonio Bernardo: coordinamento, esercizi

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 1.1 del 29.01.2010