# Le disequazioni di primo grado

## 1) Disequazioni di primo grado intere

Considero due polinomi *A(x)* e *B(x),* entrambi di primo grado in *x*.
Le seguenti espressioni:
$A(x)>B(x)$
$A(x)\geq B(x)$
$A(x)\leq B(x)$
$A(x)<B(x)$
sono dette ***disequazioni***.

Per quanto riguarda i termini utilizzati: *primo membro, secondo membro,incognita, grado,…* essi hanno lo stesso significato che presentano nel caso delle *equazioni:*
*x* è l'incognita; *primo membro* è tutto ciò che si trova a *sinistra* del simbolo della *disuguaglianza*; *secondo membro* è ciò che si trova a destra; *grado* della disequazione è il più alto esponente attribuito alla *x*.
Altrettanto si può dire delle proprietà (*sommando/sottraendo la stessa quantità ai due membri…,moltiplicando/dividendo per un numero diverso da zero entrambi i membri…il risultato non cambia).*

La distinzione che occorre tenere presente riguarda il concetto di *soluzione*:
infatti, mentre nel caso di un'*equazione* di primo grado la soluzione (se esiste) *è unica*, nel caso di una *disequazione* la soluzione è, alternativamente:
- *un insieme di valori reali (intervallo composto da infiniti valori)*
- *l'insieme vuoto*.

Lo ***svolgimento***, ossia la ricerca delle soluzioni,di una disequazione di primo grado si sviluppa con le stesse modalità con cui si affronta un'equazione di primo grado: attraverso l'applicazione consapevole delle proprietà accennate sopra si trasportano tutti i termini contenenti la *x* a primo membro e quelli privi della *x* a secondo membro.
Bisogna tenere presente una condizione **importante**: nel caso in cui a primo membro il coefficiente della *x* sia *negativo* occorre:
- moltiplicare per $-1$ sia *il primo* che *il secondo* membro
- cambiare il verso della disuguaglianza, così che $>$ diventi $<$ (e viceversa)
  e $\geq$ diventi $\leq$ (e viceversa).

E' utile, al termine dei calcoli, eseguire un piccolo grafico ove possa determinarsi il campo dei valori che verificano la disuguaglianza.
Nel grafico, *per convenzione*, utilizziamo *linee continue* per indicare l'intervallo in cui la disequazione è soddisfatta, *linee tratteggiate* per indicare l'intervallo dove la disequazione non è soddisfatta.

***Esempio 1.1***

$2x-3>5-4x$ sposto le *x* a primo membro ed i numeri a secondo membro,
$2x+4x>5+3$ cambiando i segni
$6x>8$
$x>\frac{8}{6}$ semplifico:

$x > \dfrac{4}{3}$

$$\frac{4}{3}$$
- - - - - - - o——————————————

***Esempio 1.2***

$5 - 7x < 9 - x$
$x - 7x < 9 - 5$
$-6x < 4$ devo cambiare i segni e il verso
$6x > -4$
$x > -\dfrac{4}{6}$ cioè $x > -\dfrac{2}{3}$

$$-\frac{2}{3}$$
- - - - - - - - - - o——————————————

***Esempio 1.3***

$3 - 4x < 2 - 4x$
$4x - 4x < 2 - 3$
$0 < -1$ è impossibile, quindi non ci sono soluzioni

***Esempio 1.4***

$8 + x > 7 + x$
$-x + x > 7 - 8$
$0 > -1$ è verificato per qualunque valore di *x, quindi l'insieme delle soluzioni* coincide con l'insieme *R* dei numeri reali

## 2) Disequazioni di primo grado frazionarie

Sono del tipo $\dfrac{NUM(x)}{DEN(x)} \begin{cases} \geq \\ > \\ \leq \\ < \end{cases} 0$ (ovviamente un solo caso per volta !)

Attraverso il procedimento visto nel caso delle disequazioni intere, si studiano separatamente il *NUM(x)* ed il *DEN(x)* **ponendoli entrambi > 0** indipendentemente dal verso della disequazione.

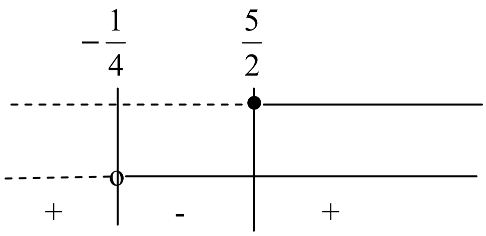
I risultati così trovati si pongono in una tabella contenente *linee continue* oppure *tratteggiate* nel modo visto per le disequazioni intere.

***Esempio 2.1***

$$\frac{2x-5}{4x+1} \le 0$$

*NUM(x)* $\ge 0$ $\qquad 2x-5 \ge 0 \qquad 2x \ge 5 \qquad x \ge \frac{5}{2}$

*DEN(x)*>0 $\qquad 4x+1 > 0 \qquad 4x > -1 \qquad x > -\frac{1}{4}$




Osservazioni:

- uso il pallino pieno ● per indicare che il valore corrispondente *è compreso*; ciò avviene nel caso dei simboli $\ge$ *e* $\le$,
- uso il pallino vuoto o per indicare che il valore corrispondente *non è compreso;*
- per il denominatore uso sempre il >, mai il $\ge$
- i segni del risultato sono i seguenti:
  - \+ nel caso di linee entrambe tratteggiate o entrambe continue
  - \- nel caso di linee diverse fra loro

La risposta all'esercizio è la seguente:

$$-\frac{1}{4} < x \le \frac{5}{2}$$

**3) Disequazioni fattorizzate**

Sono nella forma $F_1(x)\ F_2(x)\ \ldots\ldots F_n(x) > 0$, tenendo presente che:

- ciascun $F_i(x)$ è di primo grado ;
- non necessariamente abbiamo il simbolo >, ma anche <, $\ge$, $\le$;
- si arriva alla fattorizzazione attraverso i vari metodi di scomposizione studiati.

Si risolvono:

- ponendo ciascun $F_i(x) > 0$, indipendentemente dal verso della disequazione;
- costruendo una tabella con linee continue e linee tratteggiate, così come nel caso delle disequazioni fratte: avremo tanti livelli quanti sono i fattori;

Consideriamo un esempio in cui i fattori sono tre:

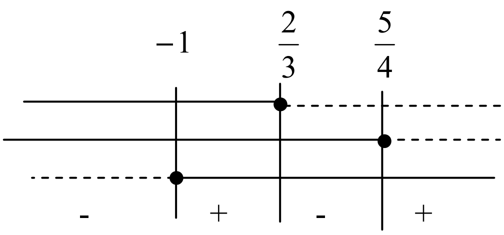
***Esempio 3.1***

$(2-3x)(5-4x)(x+1) \leq 0$

$F_1(x) \geq 0 \quad 2-3x \geq 0 \qquad -3x \geq -2 \quad 3x \leq 2 \quad x \leq \frac{2}{3}$

$F_2(x) \geq 0 \quad 5-4x \geq 0 \qquad -4x \geq -5 \quad 4x \leq 5 \quad x \leq \frac{5}{4}$

$F_3(x) \geq 0 \quad x+1 \geq 0 \qquad\qquad x \geq -1$




I segni per ciascun intervallo si mettono seguendo questa semplice regola:
\+ se non ci sono linee tratteggiate oppure sono in numero pari;
\- se le linee tratteggiate sono in numero dispari.

Pertanto la risposta all'esercizio è:

$x \leq -1; \quad \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{4}$

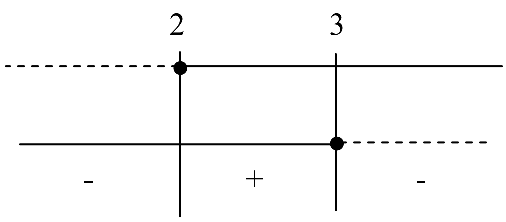
## 4) Sistemi di disequazioni di primo grado

Si studiano separatamente le disequazioni, come visto ai punti precedenti.
Si riportano quindi i risultati ottenuti in una tabella *contenente solo linee continue*.
La risposta tiene conto soltanto degli intervalli che *soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni presenti*. Un sistema può essere privo di soluzioni.

***Esempio 4.1***

$$\begin{cases} (x-2)(3-x) \leq 0 \\ \dfrac{2-5x}{4-x} \geq 0 \end{cases}$$

*I^a Disequazione* $\quad (x-2)(3-x) \leq 0$

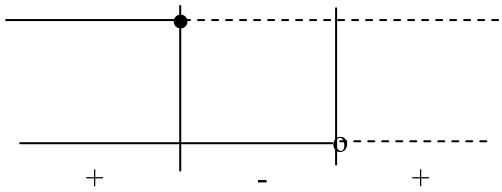



$F_1(x) \geq 0 \quad x-2 \geq 0 \qquad x \geq 2$
$F_2(x) \geq 0 \quad 3-x \geq 0 \qquad -x \geq -3 \quad x \leq 3$

*Ris.* $x \leq 2; x \geq 3$

*II^a Disequazione* $\quad \frac{2-5x}{4-x} \geq 0$

$\frac{2}{5} \qquad 4$

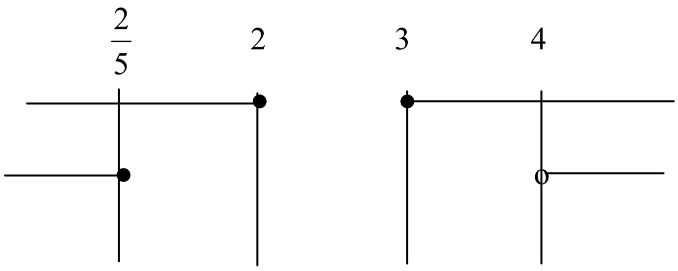



*Num(x)* $\geq 0 \quad 2-5x \geq 0 \qquad x \leq \frac{2}{5}$

*Den(x)*$>0 \quad 4-x>0 \qquad -x>-4 \quad x<4$

*Ris.* $x \leq \frac{2}{5}; x>4$

Costruisco una tabella contenente i risultati delle due disequazioni, rappresentati da linee continue. La risposta tiene conto solo degli *intervalli comuni*.




*Risultato del sistema:* $x \leq \frac{2}{5}; x>4$