Istituto Professionale L. Lagrange

Torino

A.S. 2008-2009

Appunti per la classe terza

Geometria Analitica

Autore:

Di Liscia Francesca

Indice

Capitolo 1

Piano cartesiano

Il *piano cartesiano* è un piano a cui è associata una coppia di rette orientate, perpendicolari tra loro, aventi l'origine in comune, su cui sia definita un'unità di misura. Queste rette prendono il nome di *assi cartesiani.*
Per convenzione si disegna una retta orizzontale e rivolta verso destra (asse delle *ascisse*, o delle x) e l'altra verticale e rivolta verso l'alto (asse delle *ordinate*, o delle y).
Ogni punto del piano cartesiano viene, così, individuato da due numeri: uno indica la x e l'altro la y, ovvero le coordinate del punto.
Con la notazione $P\,(4;-7)$ si indica che il punto P ha ascissa 4 e ordinata 7 ($x_P = 4$ e $y_P = -7$).

1.1 Punto medio

Il punto medio M tra due punti A e B ha come ascissa la media aritmetica delle ascisse di A e B
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$
e come ordinata la media aritmetica delle ordinate di A e B
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$
es.: Il punto medio M tra i punti $A\,(-3;9)$ e $B\,(2;-6)$ ha coordinate
$$x_M = \frac{-3+2}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y_M = \frac{9+(-6)}{2} = \frac{3}{2},$$
quindi $M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

1.2 Distanza tra due punti

La distanza tra due punti A e B coincide con la lunghezza del segmento $\overline{AB}$.

- *SEGMENTO* $\overline{AB}$ *ORIZZONTALE*
  La lunghezza del segmento è data dalla differenza tra le ascisse dei due punti (considerata in valore assoluto):
  $$\overline{AB} = |x_A - x_B|\,.$$
  Osservo che il segmento è orizzontale se i due punti hanno la stessa y.

- *SEGMENTO $\overline{AB}$ VERTICALE*

  La lunghezza del segmento è data dalla differenza tra le ordinate dei due punti (considerata in valore assoluto):
  $$\overline{AB} = |y_A - y_B|\,.$$
  Osservo che il segmento è verticale se i due punti hanno la stessa x.

- *SEGMENTO $\overline{AB}$ OBLIQUO*

  La lunghezza del segmento si ricava dalle precedenti due formule, applicando il teorema di Pitagora:
  $$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

N.B. Queste tre formule indicano lunghezze di segmenti: restituiscono tutte valori positivi.

Capitolo 2

Retta nel piano cartesiano

2.1 Equazione della retta

L'equazione di una retta nel piano cartesiano è un'equazione lineare (di primo grado) in x ed y. L'equazione può essere in forma esplicita o implicita:

- l'equazione è in *forma esplicita* se è esplicitata rispetto ad y, $\quad y = mx + q$;
- l'equazione è in *forma implicita* se tutti i termini sono a primo membro (nell'ordine x, y e termine noto), tutti i coefficienti sono interi e il coefficiente di x è positivo, $ax + by + c = 0$.

Dall'equazione in forma esplicita si ricavano le seguenti informazioni:

1. **m**: è il *coefficiente angolare*, o *pendenza* della retta. Se $m > 0$ la retta è crescente, se $m < 0$ la retta è decrescente. Il numeratore e il denominatore della m indicano inoltre l'altezza e la larghezza degli scalini su cui poggia la retta.

   es.: Se $m = +\frac{2}{3}$, allora la retta è crescente e gli scalini sono alti 2 e larghi 3

   es.: Se $m = -3$, allora la retta è decrescente e gli scalini sono alti 3 e larghi 1

   Se $m = 0$, la retta è orizzontale, ovvero parallela all'asse x; per una retta verticale la pendenza non è definita.

2. **q**: viene detta *quota*, ed indica 'a che altezza' la retta interseca l'asse y: questo punto ha coordinate $(0; q)$. Se $q = 0$ la retta interseca l'asse y nel punto $(0; 0)$, ovvero passa per l'origine.

Dall'equazione in forma implicita si possono ricavare le stesse informazioni, esplicitando l'equazione rispetto alla y (trasformando l'equazione in forma esplicita).

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$m = -\frac{a}{b} \qquad \text{pendenza}$$

$$q = -\frac{c}{b} \qquad \text{quota}$$

2.2 Posizione reciproca tra rette

Due rette nel piano possono essere tra di loro parallele, perpendicolari, incidenti o coincidenti (sovrapposte una all'altra). Considero due rette nel piano cartesiano, di equazioni $y = m_1x + q_1$ ed $y = m_2x + q_2$, ed analizzo le possibili posizioni reciproche.

- *PARALLELE*
  Due rette sono parallele se hanno la stessa pendenza, quindi se hanno la stessa m:

$$m_1 = m_2$$

$$y = \frac{1}{2}x - 5 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{sono parallele,}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - 3 \quad \text{e} \quad 2x + 3y + 5 = 0 \quad \text{sono parallele.}$$

- *PERPENDICOLARI*
  Due rette sono perpendicolari se la m della prima è l'antireciproco della m della seconda:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$y = \frac{3}{5}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{5}{3}x + 2 \quad \text{sono perpendicolari}$$

- *INCIDENTI*
  Due rette sono incidenti se $m_1 \neq m_2$ e $m_1 \neq -\frac{1}{m_2}$, ovvero se non si verifica nessuna delle precedenti condizioni.

- *COINCIDENTI*
  Due rette sono coincidenti se $m_1 = m_2$ e $q_1 = q_2$, ovvero se sono una sovrapposta all'altra.

Esempio: $y = \frac{1}{3}x - 4$ e $x - 3y - 12 = 0$ sono perpendicolari.

2.3 Appartenenza punto-retta

Un punto $P(x_P; y_P)$ appartiene ad una retta r se le coordinate di P soddisfano l'equazione di r, ovvero se, sostituite le coordinate di P ad x ed y nell'equazione di r, si ottiene un'uguaglianza verificata.

Esempio1: *Stabilire se il punto $P(3; -2)$ appartiene alla retta r :* $x - 3y - 9 = 0$.
Sostituisco le coordinate di P nell'equazione di r:

$$x_P - 3y_P - 9 = 0 \quad \text{, ovvero} \quad 3 - 3 \cdot (-2) - 0 = 0$$

Svolgo i calcoli:

$$3 + 6 - 9 = 0 \qquad 0 = 0$$

L'uguaglianza è verificata, quindi il punto appartiene alla retta.

Esempio2: *Stabilire se il punto* $P(0;-3)$ *appartiene alla retta* $s: \quad y = 2x - 5$.
Sostituisco le coordinate di P nell'equazione di s:

$$y_P = 2x_P - 5 \quad \text{, ovvero} \quad -3 = 2 \cdot 0 - 5$$

Svolgo i calcoli:

$$-3 = 0 - 5 \qquad -3 \neq -5$$

L'uguaglianza non è verificata, quindi il punto non appartiene alla retta.

2.4 Retta per due punti

Dati due punti nel piano cartesiano $A\,(x_A; y_A)$ e $A\,(x_B; y_B)$, l'equazione della retta passante per A e B è

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Esempio 1: *Scrivere l'equazione della retta passante per i punti* $A(-1;-5)$ *e* $B\,(2;4)$.
Sostituisco le coordinate dei due punti nella formula:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y+5}{4+5}$$

Svolgo i calcoli:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{9}$$

Moltiplico primo e secondo membro per il minimo comune multiplo tra i denominatori, 9:

$$9 \cdot \frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{9} \cdot 9$$

Semplifico e svolgo i calcoli:

$$3 \cdot (x+1) = (y+5) \cdot 1 \qquad\qquad 3x + 3 = y + 5$$

Trasformo l'equazione in forma esplicita

$$y = 3x - 2$$

o in forma implicita

$$3x - y - 2 = 0$$

Casi particolari

Se i due punti A e B hanno le stesse x o le stesse y questa formula non può essere applicata, perchè si annullerebbe un denominatore. In questi casi la retta è parallela ad uno degli assi:

- se $x_A = x_B$, allora la retta è parallela all'asse y, ovvero è verticale; la sua equazione sarà quindi del tipo $x = k$
- se $y_A = y_B$, allora la retta è parallela all'asse x, ovvero è verticale; la sua equazione sarà quindi del tipo $y = k$

Esempio 2: *Scrivere l'equazione della retta passante per i punti* $A(-1;3)$ *e* $B\,(-1;-5)$.
I due punti hanno la stessa ascissa $x_A = x_B = -1$, quindi la retta risulta parallela all'asse y: la sua equazione è $x = -1$.
Esempio 3: *Scrivere l'equazione della retta passante per i punti* $A(-2;4)$ *e* $B\,(6;4)$.
I due punti hanno la stessa ordinata $y_A = y_B = 4$, quindi la retta risulta parallela all'asse x: la sua equazione è $y = 4$.

2.5 Fasci di rette

Un fascio di rette è un insieme di rette aventi un elemento in comune:

- un punto, nel caso del fascio proprio di rette
- la direzione, ovvero la pendenza m, nel caso del fascio improprio di rette.

Un fascio non indica, quindi, una sola retta, bensì infinite rette. L'equazione di un fascio - sia esso proprio o improprio - deve contenere, oltre alle incognite x ed y, anche un parametro.

2.5.1 Fascio proprio di rette

L'insieme di tutte le rette del piano che passano per uno stesso punto P viene detto *fascio proprio* di rette passanti per P.
Il punto P, comune a tutte le rette del fascio, viene detto *centro del fascio.*
Il fascio proprio di rette di centro P ha equazione

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

Esempio 1: *Scrivere l'equazione del fascio proprio di rette avente centro nel punto* $P(-1;3)$.
Sostituisco le coordinate del punto P nella formula del fascio proprio:

$$y - 3 = m(x + 1)$$

Esempio 2: *Scrivere l'equazione del fascio proprio di rette avente centro nel punto* $P(\frac{2}{3};-6)$.
Sostituisco le coordinate del punto P nella formula del fascio proprio:

$$y + 6 = m(x - \frac{2}{3})$$

Esempio 3: *Scrivere l'equazione del fascio proprio di rette avente centro nel punto* $P(0;4)$.
Sostituisco le coordinate del punto P nella formula del fascio proprio:

$$y - 4 = m(x - 0), \qquad \text{ovvero} \quad y - 4 = mx$$

2.5.2 Fascio improprio di rette

Considero una retta r del piano: l'insieme che comprende r e tutte le rette ad essa parallele viene detto *fascio improprio* di rette parallele ad r.
Esempio: *Scrivere l'equazione del fascio improprio di rette avente pendenza* $m = -2$.
Nell'equazione di una retta generica in forma esplicita ($y = mx + q$), sostituisco al parametro m il valore richiesto:

$$y = -2x + q,$$

che indica l'insieme delle rette del piano cartesiano avente quella pendenza.

2.6 Intersezioni tra rette

Il punto di intersezione tra due rette nel piano cartesiano può essere determinato mettendo a sistema le equazioni delle due rette: si otterrà come soluzione una coppia ordinata di numeri, x e y, che sono le coordinate del punto di intersezione cercato.

Esempio 1: *Determinare il punto di intersezione tra le rette di equazione* $y = x - 7$ *e* $2x + y - 5 = 0$.
Si mettono a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} y = x - 7 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

e lo si risolve con un metodo a scelta (ad esempio quello di sostituzione).
Si ottiene la soluzione $x = 4, \quad y = -3$.
Si conclude che le due rette si intersecano nel punto $P(4; -3)$.

Se le due rette sono parallele, non hanno punti di intersezione, quindi il sistema risulterà impossibile; se le rette sono incidenti (un solo punto di intersezione), il sistema risulterà determinato; se le rette sono coincidenti (infiniti punti in comune), il sistema sarà indeterminato.

2.7 Distanza di un punto da una retta

La distanza di un punto $P(x_P; y_P)$ da una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ è data dalla formula

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Per applicare questa formula è necessario che l'equazione della retta sia in forma implicita.
Esempio 1: *Calcola la distanza del punto* $P(-5; -3)$ *dalla retta* $3x - 4y + 2 = 0$.
Si sostituiscono nella formula le coordinate del punto e i coefficienti della retta:
$x_P = -5 \quad y_P = -3 \quad a = 3 \quad b = -4 \quad c = +2$.

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot (-5) - 4 \cdot (-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-15 + 12 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-1|}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

Esempio 2: *Calcola la distanza del punto* $P(-3; 4)$ *dalla retta* $2x + 5y - 4 = 0$.

$$d = \frac{|2 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|-6 + 20 - 4|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{|10|}{\sqrt{29}} = \frac{10}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{10\sqrt{29}}{29}$$

In questo secondo esempio è stata effettuata una razionalizzazione del denominatore (nel quale era presente una radice quadrata).

Capitolo 3

Parabola nel piano cartesiano

3.1 Forma e caratteristiche della parabola

La parabola è la curva descritta da un sasso lanciato o da un proiettile sparato in aria (non verticalmente). Si può anche osservare questa curva puntando verso un muro un cono di luce (una pila), non perpendicolarmente al muro.

Elementi caratteristici della parabola:

- *Asse di simmetria*: La parabola è simmetrica rispetto ad una retta, ovvero è composta da due parti - dette rami della parabola - che sono disegnate a specchio rispetto ad una retta, detta asse di simmetria (o semplicemente asse).
- *Vertice*: L'asse di simmetria interseca la parabola in un punto, detto vertice della parabola.
- *Concavità*: Misura la 'larghezza' della parabola: più la parabola è stretta, maggiore è la sua concavità; nel caso in cui la parabola abbia asse verticale, si parla inoltre di concavità rivolta verso l'alto o verso il basso.

3.2 Equazione

L'equazione di una parabola nel piano cartesiano, con asse di simmetria verticale è un'equazione in x e y, di secondo grado rispetto alla x.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Analisi dei coefficienti dell'equazione:

a Misura la concavità della parabola:

- se $a > 0$, la concavità è rivolta verso l'alto
- se $a < 0$, la concavità è rivolta verso il basso
- osservo che se $a = 0$, non si ha una parabola, ma una retta, dato che scompare x^2
- maggiore è il valore di a, maggiore è la concavità, più stretta è la parabola

b Se $b = 0$ il vertice della parabola si trova sull'asse y.

c La parabola interseca l'asse y nel punto $(0; c)$; la c ha la stessa funzione della q nell'equazione della retta. Se $c = 0$ la parabola passa per l'origine degli assi cartesiani.

3.3 Grafico

Passi per disegnare il grafico di una parabola nel piano cartesiano:

- Analisi dei coefficienti
  - a: concavità verso l'alto/basso
  - c: disegnare il punto $A\,(0; c)$
- Calcolare il delta $\Delta = b^2 - 4ac$ dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ associata all'equazione della parabola.
- Calcolare le coordinate del vertice
$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$
e disegnarlo.
- Scrivere l'equazione dell'asse di simmetria (retta verticale passante per il vertice)
$$x = -\frac{b}{2a}$$
e disegnarlo.
- Calcolare le coordinate dei punti di intersezione della parabola con gli assi cartesiani:
  - Asse x: si mette a sistema la parabola con l'asse x
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$
e si risolve il sistema con il metodo di sostituzione.
$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
La prima equazione avrà al massimo due soluzioni x_1 e x_2, quindi il sistema avrà soluzioni
$$B\,(x_1; 0) \qquad \text{e} \qquad C\,(x_2; 0)$$
N.B. Questo sistema può avere due soluzioni distinte (2 punti in cui la parabola interseca l'asse x), due soluzioni coincidenti (la parabola è tangente all'asse) o essere impossibile (la parabola non interseca l'asse).
  - Asse y: è già stato disegnato il punto $(0; c)$.
- Controllare che gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse x (B e C) siano simmetrici rispetto all'asse di simmetria.
- Disegnare il simmetrico del punto A rispetto all'asse di simmetria (ed eventualmente scriverne le coordinate).