MATEMATICA C^3 -ALGEBRA 2

2 EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Stuartpilbrow, *225/365 Z is for Zzzzzzzzzzz*
http://www.flickr.com/photos/stuartpilbrow/3326749916/

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

DEFINIZIONE. Si dice **equazione di secondo grado**, un'equazione del tipo: $a x^2+b x+c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
I valori *a, b, c* prendono il nome di **coefficienti** e, in particolare, *c* viene detto **termine noto**.
Un'equazione di secondo grado si definisce:
monomia quando il secondo e il terzo coefficiente sono nulli $a x^2 = 0$
incompleta pura quando il secondo coefficiente è nullo $a x^2+c = 0$;
incompleta spuria quando il terzo coefficiente è nullo $a x^2+b x = 0$;
completa quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero $a x^2+b x+c = 0$.

►1. Risoluzione equazione di secondo grado pura

Il coefficiente della *x* è nullo e l'equazione si presenta nella forma: $ax^2+c = 0$.
Si procede portando a secondo membro il termine noto e dividendo per il coefficiente di x^2:

$$a x^2+c=0 \rightarrow a x^2 = -c \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

<u>Esempi</u>

- $4 x^2-9 = 0$.

$$4 x^2 = +9 \rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow x_1 = +\frac{3}{2} \vee x_2 = -\frac{3}{2}$$

- $4 x^2+9 = 0$.

$4 x^2+9 = 0 \rightarrow x^2=-\frac{9}{4}$ L'equazione non ammette soluzioni reali in quanto il quadrato di un numero reale è sempre non negativo, di conseguenza, l'equazione non è verificata per nessun valore dell'incognita.

Le soluzioni dell'equazione incompleta pura $ax^2+c = 0$ dipendono dal segno del rapporto $-\frac{c}{a}$.
In particolare:

- se $-\frac{c}{a} > 0$, ovvero se *a* e *c* sono discordi, l'equazione ammette le **due soluzioni reali e distinte**:
- se $-\frac{c}{a} < 0$, ovvero se *a* e *c* sono concordi, l'equazione **non ammette soluzioni reali;**
- se $-\frac{c}{a} = 0$, allora $c = 0$, l'equazione ha **due radici reali coincidenti nulle** $x_1 = x_2 = 0$.

1	$x^2-1=0$	$x^2=\frac{49}{25}$	$16 x^2=1$	$x^2-25=0$
2	$x^2-9=0$	$25=9 x^2$	$x^2+36=0$	$4-x^2=0$
3	$x^2=49$	$4-9 x^2=0$	$4 x^2-9=0$	$9 x^2-25=0$
4	$x^2+16=0$	$2 x^2-1=0$	$4 x^2+16=0$	$1+x^2=50$
5	$27 x^2-3=0$	$7 x^2=28$	$4 x^2-4=0$	$5 x^2-125=0$
6	$0{,}04 x^2=1$	$x^2-0{,}01=0$	$\frac{1}{2} x^2-2=0$	$0{,}5 x^2-4{,}5=0$

7	$2 x^2-32=0$	R. $x_1=+4 \vee x_2=-4$	$3 x^2+3=0$	R. $I.S.=\emptyset$
8	$x^2-3=0$	R. $x_1=\sqrt{3} \vee x_2=-\sqrt{3}$	$x^2+4=0$	R. $I.S.=\emptyset$
9	$5 x^2-3=0$	R. $x_1=\frac{\sqrt{15}}{5} \vee x_2=-\frac{\sqrt{15}}{5}$	$4\left(x^2-\frac{3}{4}\right)=13$	R. $x_1=+2 \vee x_2=-2$

►2. Risoluzione equazione incompleta spuria

L'equazione si presenta nella forma: $a x^2+b x = 0$.
Si raccoglie a fattore comune la *x*: $x(a x+b) = 0$
applicando la legge di annullamento del prodotto si ottiene: $x = 0$ *oppure* $a x+b = 0$

Le soluzioni dell'equazione incompleta spuria sono: $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{b}{a}$

<u>Esempio 2:</u> Risolvere l'equazione $2 x^2-4 x = 0$.
Raccogliendo a fattor comune si ha: $2 x(x-2) = 0$ da cui, applicando la legge di annullamento del prodotto, segue che $2x=0 \vee x-2=0$ da cui $x=0 \vee x=2$.

10	$x^2-3 x=0$	$x^2+2 x=0$	$x^2-x=0$	$x^2+x=0$
11	$x^2-3 x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=3$	$2x^2+6x=0$	$9x^2+16x=0$
12	$x^2+5 x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=-5$	$-2x^2+4x=0$	$7x^2-2x=0$
13	$3 x^2-2 x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{3}$	$5x=25x^2$	$81x^2=9x$
14	$7 x^2+2 x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=-\frac{2}{7}$	$\sqrt{2} x^2+\sqrt{3} x=0$	$x^2+\sqrt{2} x=0$
15	$18 x^2-36 x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=2$	$1000 x-2000 x^2=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{2}$
16	$6 x^2=5 x$	R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{5}{6}$	$3 x^2-2 x=4 x$	R. $x_1=0 \vee x_2=2$
17	$0{,}1 x^2-0{,}5 x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=5$	$0{,}5 x^2+0{,}1 x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=0{,}2$
18	$5\sqrt{2} x^2-2\sqrt{2} x=0$	$\frac{1}{2} x-\frac{1}{4} x^2=0$	$\frac{1}{6} x^2+\frac{1}{4} x=0$	$3x^2-\frac{4}{3} x=0$

►3. Risoluzione equazione completa

Per risolvere l'equazione di secondo grado completa si applica una formula che si ottiene utilizzando il metodo del completamento del quadrato:

$a x^2+b x+c = 0$	
$4 a^2 x^2+4 a b x+4 a c = 0$	si moltiplicano ambo i membri per *4a*
$4 a^2 x^2+4 a b x+4 a c+b^2 = b^2$	si aggiunge ad ambo i membri b^2
$4 a^2 x^2+4 a b x+b^2 = b^2-4 a c$	si porta *4ac* a secondo membro
$(2 a x+b)^2 = b^2-4 a c$	il primo membro risulta il quadrato di un binomio
$k = 2 a x+b$	sostituiamo il binomio *2ax+b* con la la variabile *k*
$k^2 = b^2-4 a c$	ora l'equazione diventa una equazione di secondo grado pura
$k_{1,2} = \pm\sqrt{b^2-4 a c}$	calcoliamo le soluzioni in *k*
$2 a x+b = \pm\sqrt{b^2-4 a c}$	al posto di *k* sostituiamo il binomio *2ax+b*
$2 a x = -b\pm\sqrt{b^2-4 a c}$	si separa il monomio con l'incognita
$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4 a c}}{2 a}$	si risolve l'equazione di primo grado rispetto alla *x*

Si è soliti porre $\Delta = b^2-4 a c$.

Le soluzioni sono quindi date dalla formula: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2 a}$

Δ prende il nome di **discriminante** dell'equazione. La parola discriminante deriva dal verbo *discrimen* (=divisione); in effetti, il Δ permette di effettuare una distinzione tra la tipologia delle soluzioni di un'equazione di secondo grado. Si possono infatti presentare tre casi:

- Primo caso $\Delta = b^2-4 a c > 0$
  Il radicale $\sqrt{\Delta}$ è un numero reale e l'equazione ammette le **due soluzioni reali e distinte**:
  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 a} \vee x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 a}$
- Secondo caso: $\Delta = b^2-4 a c = 0$

L'equazione ammette **due radici reali e coincidenti** date dall'espressione: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

- Terzo caso: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$
  L'equazione **non ammette soluzioni reali**

Esempi

■ $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$a=+3,\ b=-5,\ c=+2; \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(+3)(+2) = 25 - 24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{(+2)(+3)} \rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} \rightarrow x_1 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \vee x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

■ $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$a=+4,\ b=-12,\ c=+9; \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4(+4)(+9) = 144 - 144 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-12)}{2(+4)} = \frac{12}{8} \rightarrow x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

■ $x^2 - x + 3 = 0$

$a=+1,\ b=-1,\ c=+3; \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(+1)(+3) = 1 - 12 < 0$

L'equazione non ha soluzioni reali.

Riassumiamo e schematizziamo la risoluzione di un'equazione di secondo grado:

Equazioni incomplete			
Coefficienti	Nome	Equazione	Soluzioni
$b=0,\ c=0$	Monomia	$ax^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$
$b=0,\ c\neq 0$	Pura	$ax^2 + c = 0$	se a e c sono concordi $I.S.=\emptyset$ se a e c sono discordi $+\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$b\neq 0,\ c=0$	Spuria	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{b}{a}$

Equazione $ax^2 + bx + c = 0$ completa con $a \neq 0$	
Discriminante	Soluzioni
$\Delta > 0$	Due soluzioni reali e distinte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	Nessuna soluzione reale $I.S. = \emptyset$

19 $x^2 - 5x + 6 = 0$ R. $x_1 = 2 \vee x_2 = 3$

20 $x^2 + x - 20 = 0$ R. $x_1 = -5 \vee x_2 = 4$

21 $2x^2 - 6x - 6 = 0$ R. $x_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \vee x_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$

22 $x^2 - 3x + 6 = 0$ R. $I.S. = \emptyset$

23 $-x^2 + x + 42 = 0$ R.. $x_1 = -6 \vee x_2 = 7$

24 $-x^2 + 10x - 25 = 0$ R. $x_1 = x_2 = 5$

25 $-2x^2+7x-5=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=\frac{5}{2}$

26 $3x^2+2x-1=0$ R. $x_1=-1 \vee x_2=\frac{1}{3}$

27 $2x^2-\sqrt{5}x-1=0$ R. $x_1=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{4} \vee x_2=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{13}}{4}$

28 $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$ R $x_1=\sqrt{3}-\sqrt{7} \vee x_2=\sqrt{3}+\sqrt{7}$

29 $-2x^2+\sqrt{2}x+6=0$ R. $x_1=-\sqrt{2} \vee x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

30 $-\frac{4}{3}x^2-x+\frac{3}{2}=0$ R. $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=\frac{3}{4}$

31 $-\frac{4}{5}x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{20}=0$ R. $x_1=\frac{1}{8} \vee x_2=\frac{1}{2}$

32 $x^2-\sqrt{5}x-\sqrt{5}=0$ R $x_1=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2} \vee x_2=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2}$

33 $x^2-3x-2=0$ R. $x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

34 $-x^2+4x-7=0$ R. $I.S.=\emptyset$

35 $x^2-5x+3=0$ R. $x_1=\frac{5+\sqrt{13}}{2} \vee x_2=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$

36 $x^2-4x+9=0$ R. $I.S.=\emptyset$

37 $x^2-4x-9=0$ R. $x_1=2+\sqrt{13} \vee x_2=2-\sqrt{13}$

38 $x^2+6x-2=0$ R. $x_1=-3+\sqrt{11} \vee x_2=-3-\sqrt{11}$

39 $x^2-3x-\frac{5}{2}=0$ R. $x_1=\frac{3+\sqrt{19}}{2} \vee x_2=\frac{3-\sqrt{19}}{2}$

40 $2x^2-3x+1=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=\frac{1}{2}$

41 $\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=-\frac{3}{4}$

42 $3x^2+x-2=0$ R. $x_1=-1 \vee x_2=\frac{2}{3}$

43 $3x^2-\frac{2}{3}x-1=0$ R. $x_1=\frac{1+2\sqrt{7}}{9} \vee x_2=\frac{1-2\sqrt{7}}{9}$

44 $\sqrt{2}x^2-x-3\sqrt{2}=0$ R. $x_1=-\sqrt{2}\,;\, x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

►4. Formula ridotta per equazioni di secondo grado

Se il coefficiente b del termine di primo grado $a x^2+b x+c=0$ è un numero pari, conviene applicare una formula, detta **formula ridotta**, che semplifica i calcoli.
Supponiamo $b=2k$, l'equazione $a x^2+b x+c=0$ diventa $a x^2+2kx+c=0$ nella formula risolutiva dell'equazione si ottiene:

$$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{(2k)^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4(k^2-ac)}}{2a}=$$
$$=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{2\left(-k\pm\sqrt{k^2-ac}\right)}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$$

Dato che $b=2k$ quindi $k=\frac{b}{2}$ la formula ridotta che conviene utilizzare quando b è pari è:

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

La quantità sotto radice, uguale a $\frac{\Delta}{4}$, è detta anche **discriminante ridotto**.

Vediamo qualche applicazione pratica della formula ridotta.

Esempi

- $x^2-4x+3=0$

Il coefficiente di primo grado è pari, per cui conviene utilizzare la formula ridotta :

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1(3)}}{1}=2\pm\sqrt{1}\quad \text{quindi}\quad x_1=1\vee x_2=3\ .$$

- $-x^2-2x+24=0$

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-(-1)(24)}}{-1}=-1\pm\sqrt{25}\quad \text{quindi}\quad x_1=-6\vee x_2=4$$

- $-3x^2-6x+12=0$

Applicando il principio di equivalenza possiamo dividere l'equazione per -3, ricavando l'equazione $x^2+2x-4=0$; il coefficiente di primo grado è pari, per cui conviene utilizzare la formula ridotta

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-1(-4)}}{1}=-1\pm\sqrt{5}\quad \text{quindi}\quad x_1=-1+\sqrt{5}\vee x_2=-1-\sqrt{5}$$

45 $x^2+6x-3=0$ R. $x_1=-3+2\sqrt{3}\vee x_2=-3-2\sqrt{3}$

46 $3x^2-2x-2=0$ R. $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{3}\vee x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$

47 $4x^2-8x+3=0$ R. $x_1=\frac{1}{2}\vee x_2=\frac{3}{2}$

48 $7x^2-2x-5=0$ R. $x_1=1\vee x_2=-\frac{5}{7}$

49 $40x^2+80x-30=0$ R. $x_1=\frac{-2+\sqrt{7}}{2}\vee x_2=\frac{-2-\sqrt{7}}{2}$

50 $5x^2-4x+1=0$ R. $I.S.=\emptyset$

51 $5x^2-4x-9=0$ R. $x_1=-1\vee x_2=\frac{9}{5}$

52 $\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{3}{4}=0$ R. $x_1=\frac{-4+\sqrt{34}}{6}\vee x_2=-\frac{4+\sqrt{34}}{6}$

53 $6x^2-4x-2=0$ R. $x_1=1\vee x_2=-\frac{1}{3}$

54 $90x^2-180x-270=0$ R. $x_1=3\vee x_2=-1$

55 $\frac{3}{2}x^2-4x+2=0$ R. $x_1=2\vee x_2=\frac{2}{3}$

56 $\frac{4}{3}x^2-6x+6=0$ R. $x_1=3\vee x_2=\frac{3}{2}$

57 $x^2-6x+1=0$ R. $x_1=3+2\sqrt{2}\vee x_2=3-2\sqrt{2}$

58 $3x^2-12x-3=0$ R. $x_1=2+\sqrt{5}\vee x_2=2-\sqrt{5}$

59 $7x^2-6x+8=0$ R. $I.S.=\emptyset$

60 $3x^2-18x+27=0$ R. $x_1=x_2=3$

61 $9x^2+12x+1=0$ R. $x_1=\frac{-2+\sqrt{3}}{3}\vee x_2=-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

62 $9x^2-12x+4=0$ R. $x_1=x_2=\frac{2}{3}$

63 $4x^2-32x+16=0$ — R. $x_1=4+2\sqrt{3} \vee x_2=4-2\sqrt{3}$

64 $3x^2+10x+20=0$ — R. $I.S.=\emptyset$

►5. Esercizi vari sulle equazioni di secondo grado

Esercizi vari sulle equazioni di 2° grado

65 $(x-2)(3-2x)=x-2$ — R. $x_1=1 \vee x_2=2$

66 $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)=2x-1$ — R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{7}{6}$

67 $3x-x^2=x^2+3(x-2)$ — R. $x_1=\sqrt{3} \vee x_2=-\sqrt{3}$

68 $(2x-3)(2x+3)=27$ — R. $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=+\frac{3}{2}$

69 $2(x-1)(x+1)=2$ — R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

70 $(2x-1)(4-x)-11x=(1-x)^2$ — R. $I.S.=\emptyset$

71 $x(1-5x)=[3-(2+5x)]x-(x^2-1)$ — R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

72 $2x^2=x+x^2-(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$

73 $(x-3)^2=9-6x$ — R. $x_1=x_2=0$

74 $(x-2)^3-1=x^3+12x-11$ — R. $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

75 $\frac{3x-2}{2}=x^2-2$ — R. $x_1=2 \vee x_2=-\frac{1}{2}$

76 $\frac{x-3}{2}-\frac{x^2+2}{3}=1+x$ — R. $I.S.=\emptyset$

77 $\frac{x-2}{3}-(3x+3)^2=x$ — R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{29}{27}$

78 $(x+5)^2=5(4x+5)$ — R. $x_1=0 \vee x_2=10$

79 $(x-2)^3-x^3=x^2-4$ — R. $x_{1,2}=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{7}$

80 $\frac{1}{2}(x-2)^2-x=2$ — R. $x_1=0 \vee x_2=6$

81 $(x+1)^3-(x+2)^2=\frac{2x^3-1}{2}$ — R. $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{4}$

82 $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{2x-5}{3}=-\frac{5}{3}x$ — R. $I.S.=\emptyset$

83 $(x-1)(x+3)=3x^2-3$ — R. $x_1=0 \vee x_2=1$

84 $(x+2)^3+4x^2=(x-2)^3+16$ — R. $x_1=x_2=0$

85 $(3x-2)^2-4=6x^2$ — R. $x_1=0 \vee x_2=4$

86 $(2-x)^3-(2-x)^2=\frac{3-4x^3}{4}$ — R. $I.S.=\emptyset$

87 $(x+200)^2+x+200=2$ — R. $x_1=-199 \vee x_2=-202$

88 $(4-3x)^3+27x^3=64+24x$ — R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{14}{9}$

89 $3(34x-47)^2-2(34x-47)=1$ — R. $x_1=\frac{24}{17} \vee x_2=\frac{70}{51}$

90 $\left(\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}\right)^2=(x+1)^2$ — R. $x_1=-\frac{8}{5} \vee x_2=-\frac{4}{7}$

91 $\frac{1}{\sqrt{10}}x^2+1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)x$

92 $(3x-1)^2+(2x+1)^2=(3x-1)(2x+1)$ — R. $I.S.=\emptyset$

93 $(x^2+x+1)(x^2-x-1)=(x^2-1)^2$ — R. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$

94 $(x+1)^4-(x+1)^3=x^3(x+4)-x(x+1)^2+3x$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{5}$

95 $\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^3+\frac{1}{6}x^2=\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^3+\frac{1}{6}(x+1)^3+\frac{3}{2}x^4$ R. $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{141}}{6}$

96 $\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x+2}{3}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{3}$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{25}$

97 $(2-3x)^2-1=8(1-2x)+(2x+1)^2-1$ R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

98 $x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{6}=0$ R. $x_1=-\sqrt{3} \vee +\sqrt{2}$

99 $\frac{2\sqrt{3}x+1}{\sqrt{2}}-(x-\sqrt{3})^2=\frac{1-3\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}x(\sqrt{2}+2)$ R. $I.S.=\emptyset$

100 $\sqrt{3}(2x-30)^2-2\sqrt{27}(60-4x)=0$ R. $x_1=9\,;x_2=15$

101 $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$ R. $x_1=-\frac{2}{3} \vee x_2=\frac{2}{13}$

102 $\frac{x^2-16}{9}+\frac{(x-1)^2}{3}=\frac{x(x-2)}{9}+\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ R. $x_{1,2}=\frac{31\pm\sqrt{433}}{24}$

103 $\frac{(x-1)(x+2)}{2}+\frac{(x+2)(x-3)}{3}=\frac{(x-3)(x+4)}{6}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=\frac{1}{2}$

104 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3x^2-7x+2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{5x-13}{2}=\frac{2}{3}x(1-x)-\frac{73}{12}x+\frac{15}{12}$ R. $x_1=-6 \vee x_2=+6$

105 $\frac{(x^2+2x+1)^2}{4}+\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x^4-1)}{8}-(2x^2-2x+1)^2+9x^3\left(\frac{3}{8}x-1\right)+\frac{1}{4}x^2(x^2+20)=0$

R. $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{5}}{4}$

<u>Esempi</u>

- $(x-1)^2=16$

Sostituendo $x-1=t$ l'equazione diventa $t^2=16$, le cui soluzioni sono $t_1=-4\,;t_2=+4$. Per determinare la x sostituiamo i valori travati della relazione $x-1=t$ si ha

$$\begin{cases} x-1=-4\to x=-4+1=-3 \\ x-1=+4\to x=+4+1=+5 \end{cases}$$

- $(x-1)^2+2(x-1)=0$

Sostituendo $x-1=t$ l'equazione diventa $t^2+2t=0$ che si risolve $t(t+2)=0\to t_1=0\wedge t+2=0\to t_2=-2$. Sostituendo nella relazione $x-1=t$ si ha

$$\begin{cases} x-1=0\to x=+1 \\ x-1=-2\to x=-2+1=-1 \end{cases}$$

Risolvi le seguenti equazioni con opportune sostituzioni:

106 $(4x+3)^2=25$ R. $x_1=-2 \vee x_2=\frac{1}{2}$

107 $(x-5)^2+9=0$ $(3x-1)^2-36=0$

108 $4(2x+1)^2=36$ $(3x-5)^2-49=0$

109 $3(2x+5)^2-4(2x+5)=0$ $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

►6. Discussione e risoluzione di equazioni numeriche frazionarie

Problema

Sono assegnate le due frazioni algebriche $f_1 = \frac{3x+2}{1+x}$ *e* $f_2 = \frac{2x+3}{x-2}$. Esiste almeno un **valore reale** che sostituito alla variabile x rende f_1 uguale ad f_2 ?

La soluzione al problema viene cercata impostando l'equazione $\frac{3x+2}{1+x} = \frac{2x+3}{x-2}$, che presenta l'incognita al denominatore. Ricordiamo che:

DEFINIZIONE: Un'**equazione** in cui compare l'incognita al denominatore si chiama **frazionaria o fratta.**

Possiamo senz'altro affermare che, se esiste il valore reale che rende f_1 uguale ad f_2 , esso non deve annullare né il denominatore di f_1 , né quello di f_2 .

Procedura risolutiva

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori: $m.c.m. = (1+x)\cdot(x-2)$

2° passo: imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: $C.E.\ x \neq -1 \wedge x \neq 2$
La ricerca del valore che risolve il problema viene ristretta ai numeri reali appartenenti all'insieme, $D = R - \{-1, 2\} = I.D.$ detto **D**ominio dell'equazione o **I**nsieme di **D**efinizione

3° passo: applichiamo il primo principio d'equivalenza trasportando al primo membro la frazione del secondo membro $\frac{3x+2}{1+x} - \frac{2x+3}{x-2} = 0$. Riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.)
$\frac{(3x+2)\cdot(x-2)-(2x+3)\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(x-2)} = 0$

4° passo: applichiamo il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $(3x+2)\cdot(x-2)-(2x+3)\cdot(1+x) = 0$

5° passo: svolgendo i calcoli ci accorgiamo che l'equazione è di secondo grado; portiamo l'equazione alla forma canonica: $3x^2-6x+2x-4-2x-3-2x^2-3x = 0 \rightarrow x^2-9x-7 = 0$

6° passo: calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2-4ac = 81+28 = 109$ essendo positivo, l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali distinte:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{109}}{2} \rightarrow x_1 = \frac{9-\sqrt{109}}{2} \vee x_2 = \frac{9+\sqrt{109}}{2}$$

7° passo: confrontiamo le soluzioni con le **C.E.** ; in questo caso le radici appartengono all'insieme **D**; diciamo che sono accettabili e l'insieme soluzione è: $\boldsymbol{I.S.} = \left\{\frac{9-\sqrt{109}}{2}, \frac{9+\sqrt{109}}{2}\right\}$

Svolgiamo altri esempi per poi fissare la procedura risolutiva per un'equazione fratta:

110 Determina l'insieme soluzione dell'equazione: $\frac{x^2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori; per fare questo dobbiamo scomporre in fattori i denominatori. Riscriviamo: $\frac{x^2}{(x-2)(x-1)} = \frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$ il m.c.m. è $(x-2)(x-1)(x+2)$

2° passo: imponiamo le Condizioni di Esistenza: $C.E.\ x \neq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$ quindi $D = \mathbb{R} - \{1, 2, -2\} = I.D.$.

3° passo: trasportiamo al primo membro ed uguagliamo a zero; riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri dell'equazione: $\frac{x^3+2x^2-x^2+3x-2-x^3-2x^2+4x^2+8x-4x-8}{(x-2)(x-1)(x+1)} = 0$

4° passo: applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $3x^2+7x-10 = 0$

5° passo: calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2-4ac = 49+120 = 169$ essendo positivo, l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali distinte: $x_{1,2}=\frac{-7\pm 13}{6}\rightarrow x_1=-\frac{10}{3}\vee x_2=1$

6° passo: confrontiamo con le C.E. ; in questo caso solo x_1 appartiene all'insieme D; diciamo che l'insieme soluzione è: $\boldsymbol{I.S.}=\left\{-\frac{10}{3}\right\}$ mentre $x_2=1$ non è accettabile.

111 Determina l'insieme soluzione dell'equazione: $\frac{3(x+1)}{x-1}=1-\frac{2x-3}{x}$

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori; $m.c.m.=x\cdot(x-1)$

2° passo: Imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: $\boldsymbol{C.E.\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq 1}$ quindi

Prosegui tu riempiendo le parti lasciate vuote:

3° passo: riduci allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri dell'equazione:

4° passo: applica il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione in forma canonica è:

5° passo: calcola il discriminante: $\Delta=b^2-4ac=1-48=\ldots\ldots$ essendo negativo, l'equazione non ammette soluzioni reali.

6° passo: l'insieme soluzione è: $I.S.=\emptyset$ l'equazione è impossibile.

112 Determina l'insieme soluzione dell'equazione: $\frac{6}{9x^2-12x+4}+\frac{1}{3x-\frac{1}{2}}=0$

1° passo: l'equazione è fratta quindi scomponiamo i denominatori per determinare il m.c.m.

$\frac{6}{(3x-2)^2}+\frac{2}{6x-1}=0$ quindi $m.c.m.=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2° passo: **C**ondizioni di **E**sistenza: $\boldsymbol{C.E.}\ldots\ldots\ldots\ldots$ quindi $\boldsymbol{D}=\mathbb{R}-\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}=\boldsymbol{I.D.}$

3° passo: esegui i calcoli per determinare la forma canonica:

4° passo: calcola il discriminante: $\Delta=b^2-4ac=\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots$ essendo ….., l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali $\ldots\ldots\ldots\ldots x_1=\ldots\ldots\vee x_2=\ldots\ldots$

5° passo: confrontiamo con le C.E.; diciamo che **sono** ………… e l'insieme soluzione è: $\boldsymbol{I.S.}=\{\ldots\ldots\ldots\}$

*Determina l'**I**nsieme **S**oluzione delle seguenti equazioni:*

113 $\frac{3}{x}-2=x$ R. $x_1=-3\vee x_2=1$

114 $\frac{4-3x}{x}=\frac{3-2x}{x^2}$ R. $x_1=x_2=1$

115 $\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}-1$ R. $I.S.=\emptyset$

116 $\frac{x}{2}=\frac{x+2}{x-2}+1$ R. $x_1=0\vee x_2=6$

117 $\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=0$ R. $x_1=-1\vee x_2=-2$

118 $\frac{3x}{x^2-9}+\frac{x}{2x-6}=1$ R. $x_{1,2}=\frac{9\pm 3\sqrt{17}}{2}$

119 $\frac{x+9}{x-3}=2-\frac{x-3}{x+9}$ R. $I.S.=\emptyset$

120 $\frac{x}{x+1}=\frac{4}{x+2}$ R. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{5}$

121 $\frac{2x+1}{x}=\frac{x}{2x+1}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{1}{3}$

122 $\frac{x-3}{x-1}-\frac{4}{3}+\frac{x-1}{x+1}=0$ R. $x_{1,2}=3\pm\sqrt{10}$

123 $\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{2+x}{x^2+x}=0$ R. $x_1=x_2=-1$

124 $3\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{3x-1}=10$

125 $\frac{x+1}{\sqrt{2}-x}=\frac{x-2}{x-2\sqrt{2}}$ R. $x_1=0\,;\,x_2=\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$

126 $\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{3x^2-3x}$ R. $x_1=-\frac{1}{2}\,;\,x_2=4$

127 $\frac{1}{2x-4}-\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x^2-3x+2}$ R. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{97}}{4}$

128 $\frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}+\frac{2x}{3x+8}+\frac{31}{3x^2-27}=\frac{1}{3}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=1$

129 $\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}}=\frac{2x}{1-x}-\frac{2x}{1+x}$ R. $x_1=-\frac{1}{3} \vee x_2=\frac{1}{3}$

130 $\frac{x+1}{x-2\sqrt{3}}-\frac{1-x}{x+2\sqrt{3}}=\frac{x^2+8}{x^2-12}$ R. $x_1=\sqrt{6}-\sqrt{2} \vee x_2=\sqrt{2}-\sqrt{6}$

131 $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{2(3x-1)}{x^2}=5$ R. $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=\frac{1}{2}$

132 $\frac{(x-2)^2}{x^2-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x}{2x+2}$ R. $x_1=\frac{4}{3} \vee x_2=3$

133 $-\frac{x^2}{x+2}+\frac{2x}{x-2}=\frac{-x+x^3}{x^2-4}$ R. $x_1=0 \vee x_2=3$

134 $\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x-2}=\frac{6x^2-10}{x^2-x-2}$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{7}{4}$

135 $\frac{x+1}{x-2}-\frac{3x}{x+3}=\frac{x^2+2x}{x^2+x-6}$ R. $x_1=-\frac{1}{3} \vee x_2=3$

136 È vero che in $\mathbb{R}$ $\frac{3}{1+x^2}=\frac{3}{x^4+2x^2+1}$ e $\frac{2x+14}{x^3-x^2+4x+4}-\frac{4}{x-1}=\frac{2}{x^2+4}$ sono equivalenti?

137 Verifica che vale 1 il prodotto delle soluzioni dell'equazione $\frac{x}{1-x^3}+\frac{2x-2}{x^2+x+1}=0$.

138 Per l'equazione $\frac{2x+1}{1+x}+\frac{5}{1-x}-\frac{2}{x^2-1}=0$ stabilisci quali delle seguenti proposizioni sono vere dando una breve spiegazione anche per le proposizioni che ritieni false.

- L'equazione è determinata nel suo Dominio V F
- Il m.c.m. dei suoi termini è $(1-x)\cdot(x^2-1)$ V F
- Il suo I.S. è $I.S.=\{-1,4\}$ V F
- Nelle forma canonica i tre coefficienti sono numeri pari V F

139 Sull'asse reale rappresenta il **D**ominio e l'**I**nsieme **S**oluzione dell'equazione $\frac{x+2}{x}=2+\frac{x}{x+2}$.

140 Stabilisci se esiste qualche numero reale per cui la somma delle due frazioni $f_1=\frac{2-x}{x+2}$ *e* $f_2=\frac{x+1}{x-1}$ è uguale a $\frac{9}{5}$.

141 L'espressione $E=\frac{4x}{1-x^2}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}$ non assume mai il valore –1. VERO o FALSO?

►7. Discussione e risoluzione di equazioni letterali

Ricordiamo la:

DEFINIZIONE. Una equazione è letterale se i coefficienti dell'incognita sono espressioni letterali, cioè se oltre all'incognita (in genere indicata con la lettera x) compare un'altra lettera (in genere a, b, k, ….).

Esempio

- *L'equazione* $k x^2-(2k-1)x+(k-3)=0$ *è letterale di secondo grado in forma canonica; i suoi coefficienti dipendono dal parametro* k .

Il parametro k può assumere qualunque valore numerico e l'equazione rappresenta una famiglia di equazioni le cui caratteristiche variano a seconda dei valori attribuiti al parametro.
Notiamo subito che se k assume il valore zero, l'equazione non è più di secondo grado, se k assume il valore 3, l'equazione è ancora di secondo grado incompleta (spuria) mancando del termine noto.
Discutere un'equazione letterale di secondo grado significa analizzare come varia l'equazione, e quindi il suo insieme delle soluzioni, al variare del parametro. L'obiettivo è quello di stabilire per quali valori reali di k l'equazione ammette soluzioni reali.
Ricordando che le soluzioni di un'equazione di secondo grado si determinano con la formula
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ in cui compaiono i tre coefficienti a, b, c. Procediamo analizzando:

- **il primo coefficiente** $a=k$: se $k=0$ l'equazione diventa $x-3=0$ di primo grado con $I.S.=\{3\}$;
- **il secondo coefficiente** $b=-2k+1$: se è nullo, ossia se $k=\frac{1}{2}$ l'equazione diventa $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}=0$ equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-\sqrt{5} \vee x_2=\sqrt{5}$;
- **il terzo coefficiente** $c=k-3$: se è nullo, cioè se $k=3$ l'equazione diventa $3x^2-5x=0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1=0 \vee x_2=\frac{5}{3}$

Prima conclusione: per tutti i valori di k dell'insieme $\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2},3\right\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante.

- **calcoliamo il discriminante**: $\Delta=(-2k+1)^2-4k(k-3)=8k+1$, quindi

  1. se $8k+1<0 \rightarrow k<-\frac{1}{8}$ l'equazione non ammette soluzioni reali e $I.S.=\emptyset$;
  2. se $8k+1\geq 0 \rightarrow k\geq -\frac{1}{8}$ l'equazione ammette due soluzioni reali:

     2.1 distinte se $k>-\frac{1}{8} \rightarrow x_{1,2}=\frac{(2k-1)\pm\sqrt{8k+1}}{2k}$

     2.2 coincidenti se $k=-\frac{1}{8} \rightarrow x_1=x_2=5$

Riassumendo:

$k\,x^2-(2k-1)x+(k-3)=0 \;\; con \;\; k\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme soluzione	Equazione
$k=0$	$x=3$	Di primo grado
$k=\frac{1}{2}$	$x_1=-\sqrt{5} \vee x_2=+\sqrt{5}$	Pura
$k=3$	$x_1=0 \vee x_2=\frac{5}{3}$	Spuria
$k\in\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2},3\right\}$		Completa: $\Delta=8k+1$
$k<-\frac{1}{8}$	$\Delta<0$ non esistono soluzioni reali $I.S.=\emptyset$	
$k\geq-\frac{1}{8}$	$\Delta\geq0$ esistono soluzioni reali	
$k>-\frac{1}{8}$ reali distinte	$x_1=\frac{(2k-1)-\sqrt{8k+1}}{2k} \vee x_2=\frac{(2k-1)+\sqrt{8k+1}}{2k}$	
$k=-\frac{1}{8}$ reali coincidenti	$x_1=x_2=5$	

Esempio

■ *Discutere, al variare di* $k\in\mathbb{R}$ *la realtà delle radici dell'equazione* $x^2-3x+1-k=0$ **.**

Osserviamo che il primo e il secondo coefficiente sono indipendenti dal parametro *k*, quindi analizziamo il terzo coefficiente: $c=1-k$: se $k=1$ l'equazione diventa un'equazione spuria con due radici reali $x_1=0 \vee x_2=3$.

Prima conclusione: per tutti i valori di k dell'insieme $\mathbb{R}-\{1\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante.

Calcoliamo il discriminante: $\Delta=9-4(1-k)=4k+5$, quindi:

1. se $k<-\frac{5}{4}$ l'equazione non ammette soluzioni reali e $I.S.=\emptyset$
2. se $k\geq-\frac{5}{4}$ l'equazione ammette due radici reali
   2.1. distinte se $k>-\frac{5}{4} \rightarrow x_1=\frac{3-\sqrt{4k+5}}{2} \vee x_1=\frac{3+\sqrt{4k+5}}{2}$
   2.2. coincidenti se $k=-\frac{5}{4} \rightarrow x_1=x_2=\frac{3}{2}$

Riassumendo

$x^2-3x+1-k=0 \;\; con \;\; k\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme soluzione	Equazione
$k=1$	$x=3$	Spuria
$k\in\mathbb{R}-\{1\}$		Completa: $\Delta=4k+5$
$k<-\frac{5}{4}$	$\Delta<0$ non esistono soluzioni reali $I.S.=\emptyset$	
$k\geq-\frac{5}{4}$	$\Delta\geq0$ esistono soluzioni reali	
$k>-\frac{5}{4}$ reali distinte	$x_1=\frac{3-\sqrt{4k+5}}{2} \vee x_2=\frac{3+\sqrt{4k+5}}{2}$	
$k=-\frac{5}{4}$ reali coincidenti	$x_1=x_2=\frac{3}{2}$	

Esempio

■ *Discutere la seguente equazione letterale:* $\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$

L'equazione pur presentando delle frazioni è intera, in quanto l'incognita x non compare al denominatore, dipendente solo dal parametro m .

Osservazione: se $m=0$ oppure $m=1$ l'equazione è priva di significato.
Procediamo ponendo la condizione sul parametro ***C.E.*** $m\neq 0 \wedge m\neq 1$.

- 1° passo: trasportiamo a sinistra del segno di uguaglianza i termini di destra ed eseguiamo il calcolo nella parentesi: $\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)=0 \rightarrow \frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}-\frac{2mx}{m-1}\cdot\frac{1}{m}$;
- 2° passo: semplifichiamo nell'operazione di moltiplicazione il fattore *m*, avendo posto nelle C.E. $m\neq 0$ $\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx+2x}{m-1}=0$;
- 3° passo: riduciamo allo stesso denominatore e applichiamo il secondo principio d'equivalenza delle equazioni, essendo $m\neq 1$ per le C.E. Si ha: $x^2+3m-3+m^2-m-2mx-2x=0$;
- 4° passo: l'equazione di secondo grado in forma canonica è: $x^2-2x(m+1)+m^2+2m-3=0$

Discussione

- il primo coefficiente $a=1$ non dipende dal valore del parametro, quindi l'equazione è di secondo grado per qualunque valore di $m\in\mathbb{R}-\{0,1\}$;
- il secondo coefficiente $b=-2(m+1)$: se $m=-1$ l'equazione diventa $x^2-4=0$, equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-2 \vee x_2=2$;
- il terzo coefficiente $c=m^2+2m-3$: se $c=m^2+2m-3=0 \rightarrow m=1 \vee m=-3$ (non consideriamo il caso $m=1$ per le C.E.) l'equazione diventa $x^2+4x=0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1=0 \vee x_2=-4$.

Prima conclusione: per tutti i valori di *m* nell'insieme $\mathbb{R}-\{0,1,-1,-3\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante.

- Calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=(m+1)^2-(m^2+2m-3)=4$; esso risulta indipendente dal valore del parametro e sempre positivo, quindi l'equazione ammette due soluzioni reali distinte $x_1=m-1 \vee x_2=m+3$.

Riassumendo in una tabella tutti i risultati ottenuti:

$\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$ *con* $m\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme soluzione	Equazione
$m=0 \vee m=1$		Priva di significato
$m=-1$	$x_1=-2 \vee x_2=2$	Pura
$\cancel{m=1} \vee m=-3$	$x_1=0;\ x_2=-4$	Spuria
$m\in\mathbb{R}-\{0,1,-1,-3\}$	$x_1=m-1 \vee x_2=m+3$	Completa: $\Delta=4$

Esempio

- Discutere la seguente equazione parametrica: $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)=k+\frac{2k}{kx-x^2}-1$

L'equazione è fratta, poiché nel denominatore compare l'incognita x.

- 1° passo: trasportiamo i termini del secondo membro a sinistra del segno uguale e scomponiamo in fattori i denominatori: $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0$;

  Poniamo le Condizioni d'Esistenza: $C.E.\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq k\ \wedge\ x\neq -k$
- 2° passo: svolgiamo i calcoli entro la parentesi e moltiplichiamo $\frac{k^2+x^2}{x(k-x)}-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0$;
- 3° passo: riduciamo allo stesso denominatore, applichiamo il secondo principio d'equivalenza e otteniamo la forma canonica $kx^2+kx\cdot(1-k)+k\cdot(k-2)=0$ **.**

Osservazione: con le condizioni poste sull'incognita: $C.E.\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq k\ \wedge\ x\neq -k$, procediamo alla discussione dell'equazione:

- il primo coefficiente $a=k$: se $k=0$ le **C.E.** si riducono a $x\neq 0$ e l'equazione diventa $0x=0$ indeterminata, quindi $I.S.=\mathbb{R}-\{0\}$ per le condizioni poste sull'incognita.
  Con la condizione $k\neq 0$ dividiamo tutti i coefficienti per *k*, l'equazione diventa $x^2+x\cdot(1-k)+(k-2)=0$ **;**
- il secondo coefficiente $b=(1-k)$: se $k=1$ le **C.E.** sono $x\neq 0\ \wedge\ x\neq 1\ \wedge\ x\neq -1$ e l'equazione diventa $x^2-1=0$, equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-1\ \vee\ x_2=1$ non accettabili per le C.E.
- il terzo coefficiente $\boldsymbol{c=k-2}$: se $k=2$ le **C.E.** sono $x\neq 0\ \wedge\ x\neq 2\ \wedge\ x\neq -2$ e l'equazione diventa $x^2-x=0$, equazione spuria con due soluzioni $x_1=0\ \vee\ x_2=1$ di cui $x_1=0$ non accettabile per le C.E.

Prima conclusione: per tutti i valori di k dell'insieme $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante.

Calcoliamo il discriminante: $\Delta=(1-k)^2-4(k-2)=(k-3)^2$; essendo $\Delta\geq 0$ per qualunque k , si avranno sempre due soluzioni reali

1. coincidenti se $k=3\ \rightarrow\ x_1=x_2=1$ accettabili essendo le $C.E.\ x\neq -3\ \wedge\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq 3$;
2. distinte se $k\neq 3\ \rightarrow\ x_1=1\ \vee\ x_2=k-2$ e confrontando con le C.E. si ottiene $x_1=1$ non accettabile se $k=-1$; x_2 sempre accettabile per $k\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3,-1\}$.

Riassumendo:

$\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)=k+\frac{2k}{kx-x^2}-1\ con\ k\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	Condizioni sull'incognita	Insieme Soluzione	Equazione
	$x\neq -k\ \wedge\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq k$		
$k=0$	$x\neq 0$	$I.S.=\mathbb{R}-\{0\}$	indeterminata
$k=1$	$x\neq -1\ \wedge\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq 1$	$x_1=-1\ \vee\ x_2=1$ non accet.	pura
$k=2$	$x\neq -2\ \wedge\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq 2$	$x_1=0\ \vee\ x_2=1$ x_1 non accettabile	spuria
$K\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$			Completa $\Delta=(k-3)^2$
$k=3$	$x\neq -3\ \wedge\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq 3$	$x_1=x_2=1$ accettabili	
$K\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3\}$	$x\neq -k\ \wedge\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq k$	$x_1=1\ \vee\ x_2=k-2$	
$k=-1$		$x_1=1$ non accettabile	
$K\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3,-1\}$		$x_2=k-2$ accettabile	

Risolvi le seguenti equazioni letterali ed eventualmente discutile

142 $x^2-ax=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=a$

143 $ax^2-4a^3=0$ R. $a=0 \rightarrow \mathbb{R}$; $a\neq 0 \rightarrow x_1=-2a \vee x_2=2a$

144 $x^2+(x-a)^2=2ax$ R. $x_1=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}a \vee x_2=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}a$

145 $(2x-a)x=ax$ R. $x_1=0 \vee x_2=6$

146 $x^2-ax-6a^2=0$ R. $x_1=-2a \vee x_2=3a$

147 $(a-3)x^2-ax+3=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=\dfrac{3}{a-3}$

148 $ax^2-a^2x+x^2+x-ax-a=0$ R. $x_1=a \vee x_2=-\dfrac{1}{a+1}$

149 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x^2}{a-1}=0$ R. $a\neq 0 \wedge a\neq 1 \rightarrow x_1=0 \vee x_2=\dfrac{1-a}{a}$

150 $\dfrac{x}{a+1}+\dfrac{x^2}{a-1}=0$ R. $a\neq -1 \wedge a\neq 1 \rightarrow x_1=0 \vee x_2=\dfrac{1-a}{a+1}$

151 $\dfrac{2x}{3+kx}-\dfrac{x}{3-kx}=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=\dfrac{1}{k}$

152 $\dfrac{m-n}{mn}x^2=\dfrac{2m^2n}{m^2-n^2}-\dfrac{mn}{m+n}$ R. $x_{1,2}=\dfrac{\pm m}{m-n}$

153 $\dfrac{mx-x^2}{m^2-3m+2}-\dfrac{x}{2-m}-\dfrac{m+1}{m-1}=0$ R. $x_1=m-2 \vee x_2=m+1$

154 $\dfrac{x^2+2tx}{t^2-tx}-2=\dfrac{3t}{t-x}+\dfrac{x+t}{t}$ R. $x=-3t$

155 $\dfrac{x-1}{k+1}-\dfrac{x^2+1}{k^2-1}=\dfrac{2k}{1-k^2}$ R. $x_1=-1$; $x_2=k$

156 $2\cdot\sqrt{m}-x=\dfrac{m-1}{x}$ R. $x_{1,2}=\sqrt{m}\pm 1$

157 Attribuisci il valore di verità alla seguente proposizione: "L'equazione $1-\dfrac{1}{k+x}-\dfrac{1}{k-x}=0$ ammette due soluzioni reali coincidenti se $k=2$ ".

158 Nell'equazione $(a-1)\cdot(x+a)=\dfrac{x+a}{x-1}\cdot[x(a+1)-2a]$, dopo aver completato la discussione, stabilisci per quali valori di a le radici che si ottengono dall'equazione completa sono entrambe positive.

159 Motiva la verità della proposizione. "l'equazione $3kx^2+(x-k)^2+2k(k+x)=0$ ammette radici reali opposte se $k<-\dfrac{1}{3}$ "

160 Per quali valori del parametro b l'equazione $\dfrac{5x^2-4(b+1)}{b^2-4}-\dfrac{3x-1}{b+2}=\dfrac{3-2x}{2-b}-\dfrac{3x}{b^2-4}$ ha una soluzione negativa.

161 Per l'equazione $(x-k-1)^2=(k+1)\cdot(k-2x+x^2)$, completate le implicazioni:

$k=0 \rightarrow$ equazione .... $\rightarrow$ $I.S.=$....................

$k=-1 \rightarrow$ equazione .... $\rightarrow$ $x_1=$....................

.... $\rightarrow$ equazione pura $\rightarrow$ due soluzioni reali .... se .... $x_1=$........ $\vee$ $x_2=$........

162 Stabilisci per quali valori del parametro m l'equazione $\dfrac{m+2}{x-2}+mx=2$ ammette soluzioni reali distinte. Se $m=-2$ sono accettabili le radici reali trovate?

163 Dopo aver completato la discussione dell'equazione parametrica $\dfrac{x+1}{b-1}+\dfrac{b-1}{x+1}=\dfrac{3x^2+2-bx}{bx+b-1-x}$, determina se esiste qualche valore del parametro per cui $I.S.=\left\{0,\dfrac{3}{2}\right\}$.

164 Le soluzioni dell'equazione $(x+b)^2=(b+1)^2$ con $b\neq -1$ sono:

[A] $x_1=-1;\ x_2=1$ [B] $x_1=-2b-1;\ x_2=1$ [C] $x_1=x_2=1$ [D] $x_1=1-2b;\ x_2=1$

165 L'equazione $x^2-(2k+1)x+3k+1 = 0$ ammette soluzioni reali coincidenti per

[A] $k=1$ [B] $k=\frac{-2+\sqrt{7}}{2}$ [C] $k=0$ [D] $k_1=\frac{2+\sqrt{7}}{2} \vee k_2=\frac{2-\sqrt{7}}{2}$

►8. Relazioni tra soluzioni e coefficienti

Consideriamo una generica equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali (cioè $\Delta \geq 0$), e sommiamo e moltiplichiamo le soluzioni (o radici) dell'equazione:

- $x_1+x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\frac{b^2-\Delta}{2a} = \frac{b^2+4ac-b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Quindi

la somma delle radici è $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ il prodotto delle radici è $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Questa relazione vale anche nel caso in cui le radici sono coincidenti (Δ=0) e nel caso in cui le radici non sono reali (Δ<0).

Esempio

- *Determina le radici dell'equazione* $x^2+2x-15=0$ *senza applicare la formula risolutiva, ma sfruttando la somma e il prodotto delle radici stesse.*

Calcolo il discriminante $\Delta=64$ pertanto le radici sono reali. Esse hanno come somma $-\frac{b}{a}=-2$ e come prodotto $\frac{c}{a}=-15$. Le coppie di numeri che hanno per prodotto -15 sono -3 e +5, oppure +3 e -5, oppure +15 e -1, oppure -15 e +1. Tra tutte queste coppie l'unica che ha per somma -2 è la coppia -5 e +3. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono $x_1=3 \vee x_2=-5$.

- *Determina la somma e il prodotto delle soluzioni dell'equazione* $2x^2+11x-3=0$ *senza risolverla.*

Calcolo il discriminante $\Delta=145>0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-\frac{11}{2}$; $x_1 \cdot x_2=-\frac{3}{2}$.

- *Data l'equazione* $x^2\sqrt{2}+3x-2\sqrt{2}=0$ *, determina, senza risolverla, la somma e il prodotto delle radici.*

Calcolo il discriminante $\Delta=25>0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $x_1 \cdot x_2=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-2$.

- *Determina* somma e prodotto delle radici dell'equazione: $x^2+2x+15=0$

Calcolo il discriminante $\Delta=-56<0$ le radici non sono reali anche se la loro somma e il loro prodotto sono reali, infatti applicando le precendeti precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-2$ e $x_1 \cdot x_2=15$.

- *Determina* somma e prodotto delle radici dell'equazione: $x^{21}-12x+36=0$

Il discriminate $\Delta=12^2-4\cdot 36=144-144=0$. Le radici sono coindidenti, applicando la formula risolutiva si ha $x_1=x_2=6$. Applicando le formule per calcolare somma è prodotto si ha $x_1+x_2=12$ e $x_1 \cdot x_2=36$.

- *Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla differenza delle radici.*

$x_1-x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ se $-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}>0 \rightarrow x_1>x_2$, se $-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}<0 \rightarrow x_1<x_2$

- *Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei reciproci delle radici.*

Si vuole cioè esprimere $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ attraverso i coefficienti *a*, *b*, *c* dell'equazione.

Osserviamo in via preliminare che tale somma è possibile con la condizione $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$ che implica $c \neq 0$. Si ha: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1 \cdot x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$

166 Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei quadrati delle radici. Si vuole esprimere, attraverso i coefficiente *a*, *b*, *c* dell'equazione la quantità $x_1^2+x_2^2$. Si tenga presente la seguente identità $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

167 *Per ciascuna delle seguenti equazioni, completa la tabella sottostante:*

equazioni		discriminante	$I.S. \subset \mathbb{R}$?	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
a)	$5x^2+2x-1=0$	$\Delta=$			
b)	$-3x^2+1=0$	$\Delta=$			
c)	$6x^2+7x=0$	$\Delta=$			
d)	$-x^2+x-1=0$	$\Delta=$			
e)	$x^2+2x+1=0$	$\Delta=$			
f)	$2x^2-7x+1=0$	$\Delta=$			

Senza risolvere le equazioni determina somma e prodotto dello loro radici

168 $x^2+4ax+a=0$ $\qquad 2x^2-\sqrt{2}x+1=0$

169 $2x^2+6kx+3k^2=0$ $\qquad 3\sqrt{3}x^2-6\sqrt{3}x+2=0$

170 $\sqrt{2}x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+4=0$ $\qquad (\sqrt{5}+\sqrt{3})x^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})x+1=0$

Scrivi un'equazione di secondo grado che ammettte come radici le soluzioni indicate:

171 $x_1=-2;\ x_2=5$ $\qquad x_1=7;\ x_2=2$

172 $x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{3}{4}$ $\qquad x_1=\frac{2}{3};\ x_2=\frac{1}{3}$

173 $x_1=\sqrt{2};x_2=\sqrt{5}$ $\qquad x_1=\frac{1+\sqrt{2}}{2};\ x_2=1-\sqrt{2} over2$

174 Dell'equazione $3\sqrt{2}x^2-5x+\sqrt{2}=0$ è nota la radice $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$; senza risolvere l'equazione determinare l'altra radice.

175 Senza risolvere le equazioni stabilisci quale ha come soluzioni due numeri reali positivi e quale due numeri reali reciproci: $e_1:\ 5x^2+2x-1=0;\ e_2:\ -x^2+x-1=0;\ e_3:\ 2x^2-7x+1=0$

176 Un'equazione di secondo grado ha il primo coefficiente uguale a $-\frac{3}{2}$; sapendo che l'insieme soluzione è $I.S.=\left\{-\frac{3}{4};\sqrt{2}\right\}$ determinate i suoi coefficienti *b* e *c*.

177 Dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ la somma delle soluzioni è $\frac{21}{5}$ e una soluzione è $x_1=3{,}2$; determinate x_2 .

178 Determinate i coefficienti *a*, *b*, *c* di un'equazione di secondo grado sapendo che $x_1=1-\sqrt{2}$, il prodotto delle soluzioni è -1 e la somma del secondo con il terzo coefficiente è 9 .

179 Determinate i coefficienti b e c dell'equazione $x^2+bx+c=0$ sapendo che una radice è tripla dell'altra e la loro somma è 20.

180 Dopo aver completato la discussione dell'equazione parametrica $\frac{x+1}{b-1}+\frac{b-1}{x+1}=\frac{3x^2+2-bx}{bx+b-1-x}$, determina se esiste qualche valore del parametro per cui $x_1+x_2=x_1 \cdot x_2$.

Determinare due numeri conoscendone la somma e il prodotto

Consideriamo la generica equazione di secondo grado $a\,x^2+bx+c=0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali x_1 e x_2. Essendo $a\neq 0$, è possibile dividere ambo i membri per *a*, ottenendo: $x^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0$. Dato che $s=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e $p=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ si avrà $x^2-s\,x+p=0$.

Tale equazione risolve quindi la classe di problemi del tipo: "*determinare due numeri che sommati danno s e moltiplicati danno p.*"

Dall'equazione $x^2-s\,x+p=0$ discende che tali numeri esistono reali se e solo se $\Delta=s^2-4\,p\geq 0$ ovvero se il quadrato della somma è maggiore o uguale al quadruplo del loro prodotto.

Esempi

- *Determinare due numeri che sommati danno 12 e moltiplicati danno 35.*

L'equazione che risolve il problema è: $x^2-12\,x+35=0$. Le soluzioni sono $x_1=5 \vee x_2=7$.

- *Determinare due numeri che sommati danno 5 e moltiplicati danno 9.*

L'equazione che risolve il problema è: $x^2-5\,x+9=0$.

Poiché $\Delta=s^2-4\,p=25-36=-11$, l'equazione non ammette soluzioni reali e, di conseguenza, non esistono due numeri aventi la somma e il prodotto richiesti.

Determina, se possibile, due numeri aventi somma e prodotto indicati:

181 $S=3;\ P=5$ $\qquad S=7;\ P=2$

182 $S=-3;\ P=-8$ $\qquad S=-5;\ P=4$

183 $S=\frac{1}{2};\ P=\frac{2}{3}$ $\qquad S=\sqrt{2};\ P=2$

184 $S=\sqrt{7}-1;\ P=6$ $\qquad S=a+1;\ P=a^2$

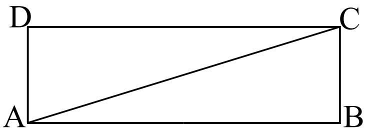
Problemi di natura geometrica di secondo grado

Problema

Determinate la misura della diagonale di un rettangolo avente il perimetro di 80m. e l'area di 375m².

Dati: $2\,p=80$, $A=375\,(m^2)$

Obiettivo: $\overline{AC}$?



Soluzione

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$ per il teorema di Pitagora sul triangolo *ABC*.

Sono incognite le misura dei lati, quindi poniamo $\overline{AB}=x$ e $\overline{BC}=y$ con $x>0$ e $y>0$

Il problema si formalizza con il sistema: $\begin{cases} x+y=40 \\ x\cdot y=375 \end{cases}$ che esprime la ricerca di due numeri nota la loro somma 40 e il loro prodotto 375. I numeri richiesti sono le soluzioni reali positive dell'equazione $t^2-40\,t+375=0$ e precisamente $t_1=15 \vee t_2=25$.

Per come abbiamo disegnato la figura abbiamo quindi: $\overline{AB}=25\text{m}\,;\ \overline{BC}=15\text{m}$ da cui $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{850}\,m=5\sqrt{34}\,m$.

185 Determinate il perimetro del rombo avente $area=24\,(m^2)$, sapendo che la somma delle misure delle sue diagonali è $14\,(m)$.

186 Costruire i due triangoli isosceli aventi $area=120\,(m^2)$ sapendo che $31\,(m)$ è la somma delle misure della base con l'altezza.

187 Il triangolo rettangolo *ABC* ha l'ipotenusa *AC* di $40\,cm$ e l'altezza *BH* ad essa relativa di $cm19{,}2$. Determinate la misura delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

►9. Scomposizione del trinomio di secondo grado

Si consideri il trinomio di secondo grado: $a x^2+b x+c$ e sia $a x^2+b x+c=0$ (con $\Delta\geq 0$) l'equazione associata a tale trinomio. Effettuiamo le seguenti operazioni:

$$a x^2+b x+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

Si sostituiscono le relazioni trovate nel precedente paragrafo

$$= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2]=$$

$$= a[x^2-x_1 x+x_2 x+x_1\cdot x_2]=$$

Si effettua il raccoglimento parziale

$$= a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)] =$$
$$= a(x-x_1)(x-x_2)$$

È quindi possibile distinguere i casi:

- <u>I caso</u>: $\Delta>0$ Il trinomio di secondo grado può essere scomposto nella forma: $a(x-x_1)(x-x_2)$;
- <u>II caso</u>: $\Delta=0$ Il trinomio di secondo grado può essere scomposto nella forma: $a(x-x_1)^2$;
- <u>II caso</u>: $\Delta<0$ Il trinomio di secondo grado non può essere scomposto.

Discriminante	**Scomposizione**
$\Delta>0 \rightarrow x_1\neq x_2$	$a x^2+b x+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta=0 \rightarrow x_1=x_2$	$a x^2+b x+c = a(x-x_1)^2$
$\Delta<0 \rightarrow x_{1,} x_2\notin\mathbb{R}$	$a x^2+b x+c$ è irriducibile

<u>Esempi</u>

- *Scomporre in fattori* x^2-5x+6
  Applicando la formula ottenuta nel I caso si ha: $x^2-5x+6 = (x-2)(x+3)$
- *Scomporre in fattori* $x^2-12x+36$
  Applicando la formula ottenuta nel II caso si ha: $x^2-12x+36 = (x-6)^2$
- *Scomporre in fattori* $2x^2+3x+5$
  Essendo $\Delta = 9-40 = -31$, il trinomio è irriducibile.
- *Scomporre il trinomio* $-5x^2+2x+1$.

1° passo: calcolo del discriminante dell'equazione associata $-5x^2+2x+1=0$:
$\Delta=(2)^2-4(-5)(+1)=4+20=24$ positivo, quindi esistono due radici reali distinte
2° passo: calcolo le radici dell'equazione associata $-5x^2+2x+1=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{-10}=\frac{1\pm\sqrt{6}}{5} \text{ quindi } x_1=\frac{1-\sqrt{6}}{5} \vee x_2=\frac{1+\sqrt{6}}{5}$$

3° passo: scrivo la scomposizione: $-5x^2+2x+1 = -5\left(x-\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$

- *Scomporre il trinomio* $6x^2+x-2$

1° passo: calcolo del discriminante dell'equazione associata $6x^2+x-2=0$: $\Delta=1^2-4(-12)=49$ positivo, quindi esistono due radici reali distinte
2° passo: calcolo le radici dell'equazione associata $6x^2+x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{1\pm 7}{12} \text{ quindi } x_1=-\frac{2}{3} \vee x_2=\frac{1}{2}$$

3° passo: scrivo la scomposizione: $6x^2+x-2 = 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = (2x-1)(3x+2)$

■ *Scomporre il trinomio* $x^2-12x+36$

Il discriminante dell'equazione associata è $\Delta=12^2-4\cdot 36=0$; le soluzioni sono coincidenti, precisamente $x_{1,2}=\frac{+12\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{12}{2}=6$ Il polinomio si scompone $x^2-12x+36=(x+6)(x+6)=(x+6)^2$. In questo caso si poteva riconoscer facilmente il quadrato del binomio.

Attenzione

Si vuole scomporre in fattori il trinomio $p=4x^2+2x-6$, avente tutti i coefficienti pari.
Anche se osserviamo che tutti i suoi coefficienti sono pari, NON POSSIAMO DIVIDERE PER DUE, non essendo una equazione; il polinomio $p=2x^2+x-3$ è diverso da quello assegnato, mentre le equazioni associate all'uno e all'altro sono equivalenti. Nel procedere alla scomposizione possiamo usare l'equazione $2x^2+x-3=0$ le cui radici sono: $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=1$, e procedere alla scomposizione del trinomio assegnato: $p=4x^2+2x-6=4\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)$

188 Scrivere un'equazione di secondo grado che ammetta le soluzioni $x_1=\frac{1}{2}$ e $x_2=3$.

In virtù di quanto visto in questo paragrafo, si ha: $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3) = 0$ da cui: $x^2+3x-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} = 0$

cioè: $x^2+5x-\frac{3}{2} = 0$ ovvero: $2x^2+5x-3 = 0$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado

189 $x^2-5x-14=0$ R. $(x+2)(x-7)$

190 $2x^2+6x-8=0$ R. $2(x-1)(x+4)$

191 $-3x^2+\frac{39}{2}x-9$ R. $-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-6)$

192 $-2x^2+7x+4$ R. $-2(x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

193 $4x^2+4x-15$ R. $4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

194 $3x^2+3x-6$ R. $3(x-1)(x+2)$

195 $4x^2-9x+2$ R. $4(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

196 $2x^2+2x-\frac{3}{2}$ R. $2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

197 $3x^2+5x-2$ R. $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)$

198 $4x^2-24x+20$ R. $4(x-5)(x-1)$

199 $2x^2-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$ R. $2(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)$

200 $\frac{4}{3}x^2+\frac{11}{3}x-\frac{7}{2}$ R. $\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)$

201 $3x^2-6x-12$ R. $3(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$

202 $2x^2-8x+2$ R. $2(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$

203 $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{8}$ R. $-\frac{1}{2}\left(x-1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

204 $-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x-\frac{45}{8}$ R. $-\frac{3}{4}\left(x+3-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x+3+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

►10. Regola di Cartesio

Se in un'equazione di secondo grado i coefficienti sono tutti diversi da zero e il discriminante è non negativo, è possibile avere delle informazioni sui segni delle soluzioni senza calcolarle esplicitamente.

DEFINIZIONE. In un'equazione $a x^2 + b x + c = 0$, dove i coefficienti sono tutti non nulli, le coppie di coefficienti *(a, b)* e (*b, c)* sono dette **coppie di coefficienti consecutivi.**
Una coppia di coefficienti consecutivi presenta:
una **permanenza** se i coefficienti hanno lo stesso segno;
una **variazione** se i coefficienti hanno segni diversi.

Esempi

	a		b		c
$+2x^2-3x-1$	$+$		$-$		$-$
		variazione		permanenza	
$-x^2-3x-1$	$-$		$-$		$-$
		permanenza		permanenza	
$-3x^2+4x-1$	$-$		$+$		$-$
		variazione		variazione	
$+2x^2+x-1$	$+$		$+$		$-$
		permanenza		variazione	

TEOREMA DI CARTESIO. In un'equazione di secondo grado $a x^2 + b x + c = 0$ con $a, b, c \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, il numero di radici positive è uguale al numero di variazioni presenti nelle coppie di coefficienti consecutivi. Se vi è una sola variazione, le radici sono discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva se la variazione è nella coppia *(a,b)*, mentre è della radice negativa se la variazione è nella coppia *(b,c)*.

Cerchiamo di capire, attraverso degli esempi, perché i segni dei coefficienti dell'equazione di secondo grado completa hanno una stretta relazione con i segni delle sue soluzioni reali.

Esempio

L'equazione $x^2 + 2x - 3 = 0$ *ha soluzioni reali in quanto* $\Delta = 16 > 0$ *; dal momento che vi è una sola variazione, quello della coppia (b,c), l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice negativa.*

Dimostriamo quanto è stato affermato ricordando che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \wedge x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; nell'equazione proposta si ha: $x_1 + x_2 = -\frac{2}{1} \wedge x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{1}$ dunque prodotto negativo e somma negativa. Il prodotto di due numeri è negativo quando i fattori sono discordi, quindi una soluzione positiva e una negativa. Chiamiamo x_1 la soluzione negativa e x_2 la soluzione positiva, poiché $x_1 + x_2 = -2 < 0$ deduciamo che in valore assoluto è più grande il numero negativo, cioè $|x_1| > |x_2|$. Riassumendo:

$x^2+2x-3=0$	a	b	c	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$	x_1	x_2
	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
	permanenza	variazione					

Esempio

L'equazione $-x^2+5x-6=0$ *ha soluzioni reali in quanto* $\Delta=1>0$ *; dal momento che vi sono due variazioni, l'equazione ha due radici positive. Dimostra quanto è stato affermato completando la tabella e completando il ragionamento.*

$-x^2+5x-6=0$	a	b	c	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$	x_1	x_2
	……	……	……	……	……	……	……
				………	………		

Essendo il prodotto ……….. e la somma ………. le due soluzioni reali sono………………… pertanto 2 ……………. → 2 soluzioni …………..

Esempi

- L'equazione $2x^2-6x-56$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta=484>0$; dal momento che vi è una sola variazione, l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva dal momento che la variazione è nella coppia *(a,b)*.
- L'equazione $-3x^2-24x-21=0$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta=324>0$; dal momento che non vi sono variazioni, l'equazione ha due radici negative.
- L'equazione $x^2-10x+25=0$ ha due soluzioni coincidenti in quanto $\Delta=0$; dal momento che vi sono due variazioni, le due radici coincidenti sono positive.

Determina il segno delle soluzioni di ogni equazione senza risolverla, dopo aver verificato che $\Delta\geq 0$

205 $x^2-5x+6=0$ $\quad$ $-x^2+x+42=0$ $\quad$ $x^2+x-20=0$

206 $3x^2+2x-1=0$ $\quad$ $2x^2-\sqrt{5}x-1=0$ $\quad$ $3x^2+5x+1=0$

207 $-x^2-x+1=0$ $\quad$ $-5x+1-x^2=0$ $\quad$ $-1-x^2-2x=0$

208 $1+x+2x^2=0$ $\quad$ $x^2-4\sqrt{2}x+2=0$ $\quad$ $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{8}$

►11. Equazioni parametriche

DEFINIZIONE. Si definisce **parametrica** un'equazione i cui coefficienti dipendono da un parametro.

L'equazione $3x^2+(k-1)x+(2-3k)=0$ è parametrica di secondo grado nell'incognita x; i suoi coefficienti dipendono dal valore assegnato al parametro k e quindi la natura e il segno delle sue soluzioni dipendono da k.

In molti problemi di applicazione della matematica in situazioni reali in cui compare un parametro, non interessa tanto determinare le soluzioni dell'equazione che formalizza il problema, quanto sapere se le soluzioni hanno determinate caratteristiche.

Sappiamo che attraverso i coefficienti di un'equazione di secondo grado si possono determinare alcune relazioni tra le sue soluzioni:

- si hanno soluzioni reali se $\Delta=b^2-4ac\geq 0$;
  - reali coincidenti se $\Delta=b^2-4ac=0$,
  - reali distinte se $\Delta=b^2-4ac>0$
- la somma delle soluzioni è $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e il prodotto delle soluzioni è $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Nell'equazione precedente si ha $\Delta=(k-1)^2-12(2-3k)$ dipendente dal parametro k.

Dall'analisi del Δ si potranno dedurre quali condizioni deve verificare k affinché esistano soluzioni reali;

Dall'analisi di somma e prodotto $x_1+x_2=-\frac{(k-1)}{3}$; $x_1 \cdot x_2=\frac{(2-3k)}{3}$ potremo stabilire il segno delle soluzioni reali.

Vediamo alcuni esercizi guidati.

209 Assegnata l'equazione $(k+1)x^2+(2k+3)x+k=0$ stabilire per quale valore di k

a) L'equazione si riduce al primo grado.
b) L'equazione ammette soluzioni reali; distinguere i casi "soluzioni coincidenti" e "soluzioni distinte".
c) La somma delle soluzioni sia nulla; determina in tal caso le soluzioni.

Svolgimento guidato

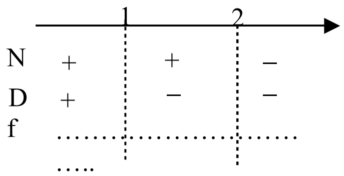
a) l'equazione diventa di primo grado se il coefficiente a si annulla $a=k+1 \rightarrow k=\ldots\ldots$:; in questo caso si ha l'equazione $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ di primo grado, da cui $x=\ldots\ldots\ldots$
b) studiamo il segno del discriminante: $\Delta=(2k+3)^2-4k(k+1)=\ldots\ldots\ldots\ldots\geq 0$ da cui ricaviamo
   - se $k=-\dfrac{9}{8}$ le soluzioni sono $\ldots\ldots\ldots\ldots$ e $x_1=x_2=\ldots\ldots$
   - se $k>-\dfrac{9}{8}$ le soluzioni sono $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
c) dalla formula ricaviamo $x_1+x_2=-\dfrac{(2k+3)}{(k+1)}$ e quindi ponendo $(2k+3)=\ldots\ldots$ si ha somma nulla se $k=\ldots\ldots$; somma nulla equivale ad annullare il secondo coefficiente, quindi le soluzioni sono $\ldots\ldots\ldots$; in questo caso sono reali? Perché?

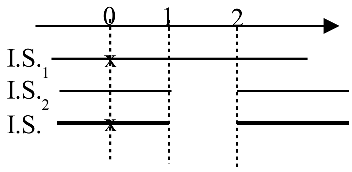
210 Assegnata l'equazione $(1-k)x^2+(k-2)x+1=0$, stabilite i valori da assegnare al parametro affinché le soluzioni reali distinte abbiano la somma positiva.

Svolgimento guidato

Nel testo del problema vi sono due richieste: a) le soluzioni siano reali distinte e b) abbiano somma positiva.

Il problema si formalizza attraverso il sistema $\begin{cases}\Delta>0\\ -\dfrac{b}{a}>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(k-2)^2-4(1-k)>0\\ -\dfrac{k-2}{1-k}>0\end{cases}$; risolviamo la prima disequazione: $d_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0 \rightarrow k^2>0 \rightarrow I.S._1=\{k\in\mathbb{R} \mid k\neq 0\}$ e la seconda d_2 cercando il segno del numeratore e del denominatore: $\begin{cases}N: -k+2>0 \rightarrow k<2\\ D: 1-k>0 \rightarrow k<1\end{cases}$ da cui con la tabella dei segni ricaviamo $I.S._2=\{k\in\mathbb{R} \mid k\ldots\ldots\ldots \vee k>\ldots\ldots\ldots\}$.





Dal grafico ricava $I.S.=I.S._1 \cap I.S._2=\{k\in\mathbb{R} \mid k\ldots\ldots\ldots \vee 0<k<\ldots\ldots \vee k\ldots\ldots\ldots\}$

211 Assegnata l'equazione $(k+1)x^2+(k+3)x+k=0$ stabilire per quale valore di k una sua soluzione è $x=-1$. In tale caso determinare l'altra soluzione.

Traccia di svolgimento

Ricordiamo che un valore numerico è soluzione di un'equazione se sostituito all'incognita trasforma l'equazione in una uguaglianza vera. Per questo motivo, sostituendo all'incognita il valore fissato, il parametro k dovrà verificare l'uguaglianza: $(k+1)(-1)^2+(k+3)(-1)+k=0 \rightarrow$ ....
Sostituendo il valore di k trovato, l'equazione diventa: $3x^2+5x+2=0$; l'altra soluzione può essere trovata o con la formula risolutiva, oppure ricordando che $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{5}{3} \rightarrow x_2=$ .... o anche

$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3} \rightarrow x_2=$ ....

212 Giustificare la verità della seguente proposizione: "per qualunque valore assegnato al parametro m l'equazione $(m-1)^2+2mx+m+1=0$ ha soluzioni reali distinte".

Determinare m affinché: $a)\ x_1+x_2=1-\sqrt{3}$; $b)\ x_1\cdot x_2=\dfrac{12}{5}$; $c)\ x_1+x_2=1-x_1\cdot x_2$

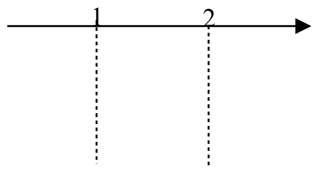
213 Nell'equazione $7x^2+(k-5)x-(k+2)=0$ determinare k affinché le soluzioni siano reali; distingui i casi "reali coincidenti" e "reali distinte".
Nel primo caso determina $x_1=x_2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; nel secondo caso, determinare k affinché

- Il prodotto delle soluzioni sia $-\frac{8}{3}$.
- Una soluzione sia nulla.
- Le soluzione siano una il reciproco dell'altra, cioè: $x_1=\frac{1}{x_2}$.
- La somma dei reciproci delle soluzioni sia $\frac{1}{2}$.
- La somma delle soluzioni superi il loro prodotto di 2.

214 Verificare che nell'equazione $(2m-3)x^2-(m+2)x+3m-2=0$ si hanno due valori del parametro per cui le soluzioni sono reali coincidenti. Determina i due valori.

215 Nell'equazione $x^2-2(k+2)x+(k^2-3k+2)=0$ determinare k affinché le soluzioni siano reali, con somma positiva e prodotto negativo.
Traccia di svolgimento: Il problema richiede tre condizioni alle quali deve soddisfare contemporaneamente il parametro, pertanto si formalizza con il sistema $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ -\frac{b}{a}>0\\ \frac{c}{a}<0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}4(k+2)^2-4(k^2-3k+2)\geq 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots<0\end{cases}$; da cui

$d_1:\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\geq 0 \rightarrow I.S._1=\ldots\ldots\ldots$
$d_2:\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0 \rightarrow I.S._2=\ldots\ldots\ldots$
$d_3:\ (k-2)(k-1)<0$ da cui la tabella dei segni



e $I.S._3=\ldots\ldots\ldots$

Completate il procedimento per determinare I.S. del sistema e la risposta al problema assegnato.

216 $x^2-2x-k=0$ determinare k in modo che

- le soluzioni siano reali e distinte (Δ>0) R. $[k>-1]$
- la somma delle soluzioni sia 10 $(x_1+x_2=10)$ impossibile
- il prodotto delle soluzioni sia10 $(x_1\cdot x_2=10)$ R. $[k=-10]$
- una soluzione sia uguale a 0 (sostituire 0 alla x) R. $[k=0]$
- le radici siano opposte $(x_1+x_2=0)$ impossibile
- le radici sono reciproche $(x_1\cdot x_2=1)$ R. $[k=-1]$
- le radici sono coincidenti (Δ=0) R. $[k=-1]$
- la somma dei quadrati delle radici è 12 $(x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12)$ R. $[k=4]$
- la somma dei reciproci delle radici è -4 $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-4\right)$ R. $\left[k=\frac{1}{2}\right]$
- la somma dei cubi delle radici è 1
  $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=1$ R. $\left[k=-\frac{7}{6}\right]$

217 $x^2-kx-1=0$ determinate k in modo che

- le soluzioni siano coincidenti impossibile
- la somma delle radici sia 8 R. $[k=8]$
- le radici siano opposte R. $[k=0]$
- una radice sia $-\frac{1}{3}$ R. $\left[k=\frac{8}{3}\right]$

218 $x^2+(k+1)x+k=0$ determinate k affinché
- una soluzione sia uguale a zero R. $[k=0]$
- abbia soluzioni opposte R. $[k=-1]$
- non abbia soluzioni reali impossibile
- le radici siano reciproche R. $[k=1]$

219 $x^2-kx+6=0$ determinate k affinché
- la somma delle radici sia 7 R. $[k=7]$
- le radici sono reali e opposte impossibile
- la somma dei reciproci delle radici sia -6 R. $[k=-36]$
- una radice sia $-\frac{3}{2}$ R. $\left[k=-\frac{11}{2}\right]$

220 $x^2+(k+1)x+k^2=0$ determinare k affinché
- abbia come soluzione -1 R. $[k=0;1]$
- abbia una soluzione doppia ($x_1=x_2$) R. $\left[k=1;-\frac{1}{3}\right]$
- le radici siano reciproche R. $[k=\pm 1]$
- una radice sia l'opposto della reciproca dell'altra impossibile

221 $kx^2-2kx+k-2=0$ determinare k affinché
- una radice sia nulla R. $[k=2]$
- la somma dei reciproci delle radici sia 1 R. $[k=-2]$
- la somma dei quadrati delle radici sia 4 R. $[k=2]$
- la somma delle radici superi di 5 il loro prodotto R. $\left[k=\frac{1}{2}\right]$

222 $x(x-a)=\frac{a+x}{a+2}$ determinate a affinché
- una soluzione sia 1 R. $[a=-1\pm\sqrt{2}]$
- l'equazione sia di primo grado R. impossibile
- una soluzione sia uguale al reciproco dell'altra R. $[a=-1]$
- la somma delle soluzioni sia il doppio del loro prodotto R. $\left[\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}\right]$

223 Per quale valore di $k\in\mathbb{R}$ l'equazione $kx^2-x+k=0$ non ammette soluzioni reali?

224 Per quale valore di $k\in\mathbb{R}$ l'equazione $x^2+(k-2)x+1=0$ ammette due soluzioni reali e distinte?

Per quale valore di k l'equazione $(k-1)x^2+kx+(k+1)=0$ ha una soluzione nulla?

[A] $k=1$ [B] $k=-1$ [C] $k=0$ [D] nessun valore di k

225 Per quale valore di k l'equazione $kx^2+\frac{1}{2}x+1=0$ ha due soluzioni identiche?

[A] $k=\frac{1}{4}$ [B] $k=\frac{1}{16}$ [C] $k=2$ [D] nessun valore di k

226 Per quale valore di k l'equazione $(k+3)x^2-2x+k=0$ ammette due soluzioni reciproche?

[A] $k=0$ [B] $k=-3$ [C] qualsiasi [D] nessun valore di k

227 Per quale valore di k l'equazione $(k+1)x^2-kx-4=0$ ha una soluzione uguale a 2?

[A] k=4 [B] k=-2 [C] k=0 [D] k=-1

228 Se l'equazione $(k+1)x^2-kx-4=0$ ha una soluzione uguale a 2 quanto vale l'altra soluzione?

[A] $x=0$ [B] $x=-2$ [C] $x=\frac{1}{2}$ [D] $x=2$

►12. Problemi di secondo grado in una incognita

La risoluzione dei problemi … serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose. (R. Descartes)

Sappiamo che nel corso degli studi o nell'attività lavorativa possono presentarsi problemi di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale; possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze presenti nel problema e quando si può costruire, tramite queste relazioni, un modello matematico che ci permetta di raggiungere la soluzione al quesito posto dalla situazione problematica.
Affronteremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di secondo grado in una sola incognita.
Teniamo presente, prima di buttarci nella risoluzione del problema, alcuni passi che ci aiuteranno a costruire il modello matematico:

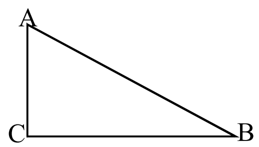
- la lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
- la scelta della grandezza incognita del problema, la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, le condizioni che devono essere soddisfatte dall'incognita;
- la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione del modello matematico (equazione risolvente).

Dopo aver risolto l'equazione occorre confrontare la soluzione trovata con le condizioni poste dal problema.

Problema 1

Nel triangolo rettangolo ABC, rettangolo in C l'ipotenusa supera il cateto maggiore CB di 2m; la differenza tra i cateti è 23m. Determinare la misura del perimetro e l'area di ABC.

Dati	Obiettivo
$\overline{AB}=\overline{CB}+2$ $\overline{CB}-\overline{AC}=23$ $A\hat{C}B=retto$	$?\ 2p$ $?\ Area$



Strategia risolutiva. Osserva che $2p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\ ;\ Area=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{2}$

Poni $\overline{BC}=x$ dai dati si ha $\begin{array}{l}\overline{AB}=x+2\\ \overline{AC}=x-23\end{array}$ con $\begin{cases}x>0 & \text{essendo misura di un segmento}\\ x>23 & \text{poiché } \overline{AC} \text{ deve essere positiva}\end{cases}$

Essendo il triangolo rettangolo, i lati sono legati dal teorema di Pitagora quindi si deve verificare:
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 \rightarrow (x+2)^2=(x-23)^2+x^2$. L' equazione risolvente di secondo grado, in forma canonica: $x^2-50x+525=0$ con $\Delta=400$. L'equazione è determinata con il discriminante positivo, quindi esistono due soluzioni reali distinte: $x_1=15 \vee x_2=35$ entrambe positive. Ai fini del problema x_1 non è accettabile, quindi il problema ha una sola soluzione e $\overline{BC}=35\ ;\ \overline{AB}=37\ ;\ \overline{AC}=12$
Conclusione: $2p=35+37+12=84\,(m);\ Area=210\,(m^2)$

Problema 2

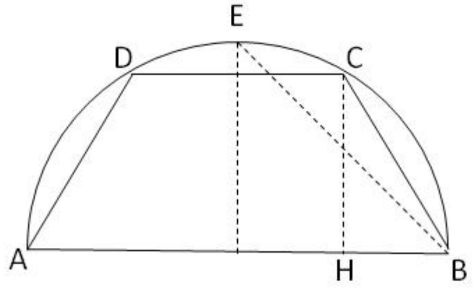
Un padre aveva 26 anni alla nascita del figlio; moltiplicando le età attuali del padre e del figlio si trova il triplo del quadrato dell'età del figlio; calcolare le due età.

Indichiamo con p l'età attuale del padre e con f l'età del figlio
Dati: $p=f+26\ ;\ p\cdot f=3f^2$ Obiettivo: $?\,f\ ;\ ?\,p$
Strategia risolutiva: I dati permettono di impostare la relazione $(f+26)\cdot f=3\cdot f^2$ che esprime il legame tra le età di oggi del padre e del figlio; siamo di fronte ad un'equazione di secondo grado nell'incognita f .
La soluzione dell'equazione deve essere espressa da un numero positivo poiché esprime l'età.
Risolviamo: $2f^2-26f=0$ le cui soluzioni sono $f_1=0 \vee f_2=13$. Per le condizioni poste la soluzione del problema è $f=13$.
Risposta: Oggi il figlio ha 13 anni e il padre 39 anni.

Problema 3

Il trapezio isoscele ABCD è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB di misura 25cm; determina le misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è 62cm.

Dati	Obiettivo
$\overline{AB}=25$	
$2\ p=62$	$?\ \overline{DC}$
$\overline{AB}\parallel\overline{DC}$	$?\ \overline{CB}$
$\overline{AD}=\overline{CB}$	



Strategia risolutiva:

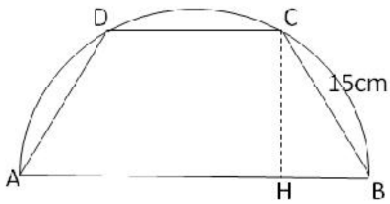
$\overline{AB}+\overline{DC}+2\ \overline{BC}=62$; fissiamo come incognita la misura in cm di BC: $\overline{BC}=x$

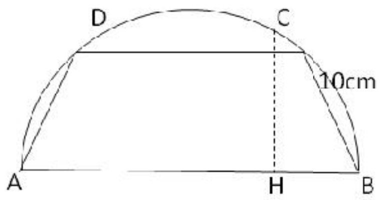
Determiniamo le condizioni sull'incognita: dovrà essere $x>0$ poiché rappresenta la misura di un segmento e inoltre affinché esista realmente il trapezio isoscele il punto C non deve coincidere con il punto medio E dell'arco DC, quindi $x<\frac{25}{2}\sqrt{2}$

Tracciata l'altezza $CH\ (H\in AB)$ si ha $\overline{DC}=\overline{AB}-2\ \overline{HB}$ e per il 1° teorema di Euclide sul triangolo ACB , rettangolo in C , $\overline{HB}:\overline{CB}=\overline{CB}:\overline{AB}$; determiniamo quindi la misura di HB in funzione dell'incognita fissata: $\overline{HB}=\frac{x^2}{25}$ da cui $\overline{DC}=25-\frac{2\ x^2}{25}$

Costruiamo l'equazione risolvente: $25+2\ x+25-\frac{2\ x^2}{25}=62\ \rightarrow\ x^2-25\ x+150=0$ che ha soluzioni reali perché ……………… entrambe positive perché …………………………

Si ottiene $x_1=10\ \vee\ x_2=15$, entrambe accettabili. Si hanno dunque due trapezi inscritti:





Problema 4

Un capitale di 25000 € viene depositato in banca a un tasso di interesse annuo c. Gli interessi maturati durante il primo anno non vengono ritirati. Nell'anno seguente si investono sia il capitale sia gli interessi maturati a un tasso di interesse annuo aumentato dello 0,5%. Alla fine dei due anni si ritira la somma di 26291,10 €. Calcola i tassi di interesse praticati dalla banca.

Svolgimento. Assumiamo come variabile c il tasso di interesse praticato il primo anno, espresso come numero decimale e non in forma percentuale. Il tasso praticato nel secondo anno sarà c+0,05.

Alla fine del primo anno in banca rimane tra capitale e interessi $25000+25000\cdot c=25000(1+c)$. Nel secondo anno il tasso praticato è c+0,005 che va applicato alla somma 25000(1+c).

Si ottiene quindi l'equazione $25000(1+c)(1+c+0{,}005)=26291{,}10$

Risolvo l'equazione

$25000(1+c)(1{,}005+c)=26291{,}10$ moltiplicando tra le parentesi tonde si ha

$25000(1{,}005+c+1{,}005\,c+c^2)=26291{,}10$ dividendo per 25000 primo e secondo membro

$1{,}005+c+1{,}005\,c+c^2=\frac{26291{,}10}{25000}$ riscrivendo in ordine l'equazione si ha

$c^2+2{,}005\,c-0{,}046644$ applico la formula risolutiva

$c_{1,2}=\frac{-2{,}005\pm\sqrt{4{,}020025+0{,}186576}}{2}=\frac{-2{,}005\pm2{,}051}{2}\qquad c_1=-2{,}028\qquad c_2=0{,}023$

La soluzione c_1 è negativa e non è accettabile.

La risposta al problema è 0,023 cioè 2,3% il primo anno e 2,8% il secondo anno.

229 Il quadrato di un numero reale supera la metà del numero stesso di 5. Determina i numeri reali che rendono vera la proposizione enunciata. [-2; 5/2]

230 Il prodotto della metà di un numero relativo con il suo successivo è 666. Quali numeri verificano questa proprietà? [36; -37]

231 Trova un numero positivo che addizionato al proprio quadrato dia come somma 156.

232 Un numero addizionato al quadrato della su ametà, dàcome risultato 120. Trova il numero.

233 Verifica che non esiste alcun numero reale tale che il quadrato del suo doppio uguagli la differenza tra il triplo del suo quadrato e il quadrato della somma del numero con 3.

234 Due numeri naturali hanno rapporto 2/3 e somma dei loro quadrati 3757. Individua i numeri che verificano questa proprietà. [51, 34]

235 La somma dei quadrati di due numeri pari consecutivi è 580. Quali sono i due numeri?[16; 18]

236 Di due numeri naturali consecutivi si sa che la somma dei loro reciproci è 9/20. Quali sono i due numeri? [4: 5]

237 Di cinque numeri interi consecutivi si sa che la differenza tra il quadrato della somma degli utlimi due numeri e la somma dei quadrati dei primi tre è 702. Qual è il più piccolo di questi numeri? [17]

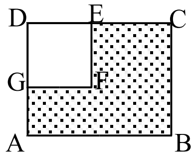
238 Due navi partono contemporaneamente da uno stesso porto e arrivano alla stessa destinazione dopo aver percorso sulla stessa rotta a velocità costante 720 miglia. Sapendo che una delle due navi viaggia con una velocità di 1 nodo (1 miglio all'ora) superiore a quella dell'altra nave e che perciò arriva 3 ore prima a destinazione, determina le velocità in nodi delle due navi. [15; 16]

239 Due navi che viaggiano su rotte perpen-dicolari a velocità costante si incontrano in mare aperto. Sapendo che una delle navi viaggia a 15 nodi (1 nodo = 1 miglio all'ora), dopo quanto tempo le due navi si trovano alla distanza di 40 miglia?

240 Un maratoneta durante una llenamento fa due giri di un percorso di 22 km mantenendo in ciasscun giro una velocità costante ma nel secondo giro la velocità è inferiore di 0,5 km/h rispetto al primo giro. A quali velocità a corso se ha impiegato comples-sivamente 2 ore e un quarto?

241 Un capitale di 1200 € è depositato in banca a un certo tasso di interesse annuale. Alla scadenza del primo anno gli interessi maturati vengono ridepositati sullo stesso conto. Alla scadenza del secondo anno si ritira la somma di 12854,70 euro. Qual è stato il tasso di interesse? [3,5%]

242 Da un cartoncino rettangolare (ABCD, come in figura) si vuole ritagliare un quadrato (DEFG) in modo che le due parti ottenute siano equiva-lenti. Determinare la misura del lato del quadrato sapendo che $\overline{EC}=6\,cm$ e $\overline{AG}=4\,cm$. $[\overline{DE}=12\text{cm}]$



243 Un terreno a forma rettangolare di 6016m^2 viene recintato con un muro lungo 350m. Quali sono le dimensioni del rettangolo? [47; 128]

244 Determinare sul segmento AB di misura 5m un punto P tale che il rettangolo delle due parti sia equivalente al quadrato di lato 2m. Rappresenta con un disegno le situazioni soluzione. [1cm; 4cm]

245 Calcolare perimetro e area del triangolo ABC isoscele sulla base AB sapendo che la differenza tra la base e l'altezza ad essa relativa è m.0,5 e tale è anche la differenza tra il lato CB e la base stessa. [2p=25m; A=30m^2]

246 La superficie del rettangolo ABCD supera di m^{2}119 la superficie del quadrato costruito sul lato minore AD. Determinare il perimetro e la misura della diagonale sapendo che i 7/10 del lato maggiore AB sono uguali ai 12/5 del lato minore. [2p=62m; d=25m]

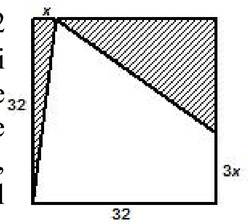
247 Nel trapezio rettangolo ABCD, il rapporto tra la base maggiore AB e la minore CD è 8/5, il lato obliquo forma con AB un angolo di 45°.Determinare il perimetro sapendo che l'area è 312 m^2. $[2p=64+12\sqrt{2}]$

248 Determina il perimetro di un rombo che ha l'area di 24m^2 e il rapporto tra le diagonali 4/3. [40m]

249 Un rettangolo ABCD ha il perimetro di 48cm e l'area di 128cm^2. A una certa distanza x dal vertice A sui due lati AD e AB si prendono rispettivamente i punti P e Q. Alla stessa distanza x dal vertice C sui lati CB e CD si prendono rispettivamente i punti R e S. Sapendo che il rapporto tra l'area del rettangolo ABCD e l'area del quadrilatero PQRS è 32/23 calcola la distanza x. [6cm]

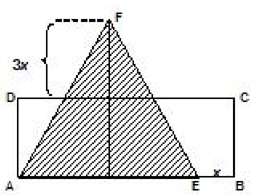
250 Un trapezio rettangolo ha la base minore di 9cm, l'altezza i 2/9 della base maggiore e l'area di $20+9\sqrt{2}\,cm^2$. Determina la misura della base maggiore. $[3\sqrt{2}]$

251 Da un quadrato di 32 cm di lato vengono ritagliati due triangoli rettangoli come descritti in figura dalla parte colorata. Calcola la misura di x, inferiore alla metà del lato del quadrato, in modo che l'area totale dei due triangoli evidenziati sia pari a 344 cm^2.



$$\left[\frac{32}{2}x+\frac{(32-x)(32-3x)}{2}=344 \ \rightarrow \ x=4\text{cm}\right]$$

252 Il rettangolo ABCD ha l'area di 240 cm2 e l'altezza AD di 12 cm. Si vuole trasformare il rettan-golo in un triangolo



AEF allungando l'altezza di una quantità 3x e accorciando la base di una quantità x (vedi figura) in modo che il nuovo triangolo AEF che abbia l'area di 162 cm^2. [x=2; la soluzione x=14 non è accettabile]

253 Il rettangolo AEFG ha l'area di 768 cm^2 e l'altezza AG di 24 cm. Si vuole allungare l'altezza di una quantità x e accorciare la base di una quantità doppia 2x in modo da ottenere un secondo rettangolo ABCD che abbia l'area di 702 cm^2. Determina la quantità x. [3cm]

254 Il rettangolo ABCD ha l'area di 558 cm^2 e il lato DC di 18 cm. Lo si vuole trasformare in un nuovo rettangolo AEFG accorciando l'altezza di una quantità 5x e allungando la base di una quantità 4x in modo che il nuovo rettangolo AEFG che abbia l'area di 228 cm^2. Determina la quantità x necessaria a compiere la trasformazione richiesta. [5]

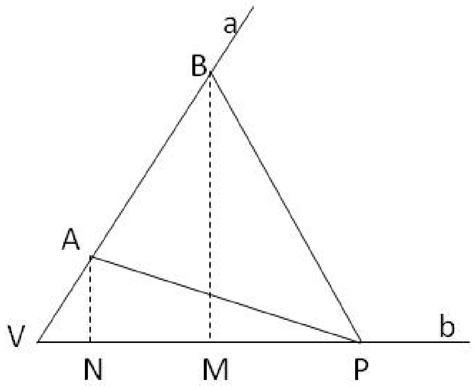
255 La piramide di Cheope è ha base quadrata ed ha una superficie totale pari a 135700 m^2. Sapendo che l'apotema della piramide è pari a 180 metri, si calcoli la lunghezza del lato di base. [230 m]

256 Un container a forma di parallelepipedo a base quadrata ha una superficie totale pari a 210 m^2. L'altezza è il doppio del lato di base diminuita di 2 metri. Trovare la lunghezza del lato di base. [5m]

I problemi che abbiamo proposto sono caratterizzati da dati numerici e di conseguenza le soluzioni numeriche dell'equazione risolvente sono facilmente confrontabili con le condizioni poste sull'incognita. Abbiamo anche visto che le soluzioni dell'equazione non sono sempre anche soluzioni del problema e d'altro canto può succedere che il problema abbia due soluzioni.
Affrontiamo ora un problema letterale, nel quale alcuni dati sono espressi da lettere. In questi problemi dovremo rispettare le condizioni poste sull'incognita, ma anche analizzare per quali valori della lettera il problema ammette soluzioni reali. Dovremo quindi procedere con la discussione dell'equazione parametrica risolvente per stabilire se il problema letterale ammette soluzioni.

Problema 5

Sul lato a *dell'angolo* $a\hat{V}b=60°$ *si fissano i punti A e B tali che* $\overline{VA}=2k$ e $\overline{VB}=8k$.
Determina sul lato b *un punto* P *in modo che il rapporto tra* PB *e* PA *sia 2.*

Dati	Obiettivo	Figura
$a\hat{V}b=60°$ $\overline{VA}=2k$ $\overline{VB}=8k$	$?\ P\in b$ tale che $\dfrac{PB}{PA}=2$	

Osservazione preliminare: le misure dei segmenti *VA* e *VB* sono espresse in forma letterale, affinché il problema abbia significato deve essere $k>0$.

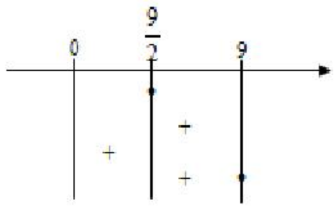
Strategia risolutiva:
La posizione del punto *P* sul lato *b* sarà individuata dalla distanza di *P* da *V*: poniamo quindi $\overline{VP}=x$ con $x>0$ e determiniamo $\overline{PB}$ e $\overline{PA}$ in funzione di *x* per poter sfruttare la richiesta contenuta nell'obiettivo come equazione risolvente.
Sia *M* il piede della perpendicolare da *B* al lato *b*; nel triangolo rettangolo *PMB* si ha $\overline{PB}^2=\overline{BM}^2+\overline{PM}^2$ (*) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo *BVM*, rettangolo in *M* con l'angolo *V* di 60° si ha $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BV}\cdot\sqrt{3}=4k\cdot\sqrt{3}$; $\overline{PM}=\overline{VP}-\overline{VM}$ e $\overline{VM}=\frac{1}{2}\overline{VB}=4k$; per quanto detto sul triangolo *BVM*, quindi $\overline{PM}=x-4k$; sostituendo in (*) si ottiene $\overline{PB}^2=48k^2+(x-4k)^2$.
Sia *N* il piede della perpendicolare da *A* al lato *b*; nel triangolo rettangolo *PNA*. Con analogo ragionamento otteniamo: $\overline{PA}^2=\overline{AN}^2+\overline{PN}^2$ (**) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo *AVN*, rettangolo in *N* con l'angolo *V* di 60° si ha $\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AV}\cdot\sqrt{3}=k\cdot\sqrt{3}$ e $\overline{VN}=\frac{1}{2}\overline{AV}=k$; $\overline{PN}=\overline{VP}-\overline{VN}=x-k$; sostituendo in

(**) si ottiene $\overline{PA}^2=3k^2+(x-k)^2$.
Determiniamo l'equazione risolvente ricordando che il rapporto tra due segmenti è uguale al rapporto tra le rispettive misure ed elevando al quadrato si ha $\frac{\overline{PB}^2}{\overline{PA}^2}=4$. Sostituendo quanto trovato si ha l'equazione $48k^2+(x-4k)^2=4\cdot\left[3k^2+(x-k)^2\right]$ da cui $x^2=16k^2$. Si tratta di un'equazione di secondo grado pura, avente due soluzioni reali opposte essendo il secondo membro positivo, quindi $x_1=-4k \lor +4k$ e per le condizioni poste solo x_2 è accettabile.
Con quale punto della figura tracciata inizialmente viene a coincidere il punto P che risolve il problema?

257 Sul prolungamento dei lati *AB*, *BC*, *CD*, *DA* del quadrato *ABCD* prendi rispettivamente i punti *Q*, *R*, *S*, *P* in modo che *QB=RC=SD=PA*. Dimostra che *PQRS* è un quadrato; nell'ipotesi che sia $\overline{AB}=3\text{m}$ determina $\overline{AP}$ in modo che l'area di *PQRS* sia *k*, con *k* reale positivo.

Traccia dello svolgimento
Completa dati, obiettivo e figura del problema.
Per dimostrare che PQRS è un quadrato dobbiamo
dimostrare che i lati sono ……………………
e che gli angoli sono ……….”
Ipotesi: ……………………
Tesi: …………………..

Poni $\overline{AP}=x$ con $x>0$
$Area_{PQRS}=\overline{PQ}^2=\overline{PA}^2+\overline{AQ}^2$ per il teorema di Pitagora nel triangolo ……….
Verifica che si ottiene l'equazione risolvente $2x^2+6x+(9-k)=0$, equazione in cui il terzo coefficiente dipende da *k*. Dal momento che vogliamo soluzioni reali positive, procediamo alla discussione dell'equazione mediante il metodo di Cartesio:
calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=9-18+2k$. Affinché l'equazione ammetta soluzioni reali deve essere $k\geq\frac{9}{2}$



analizziamo ora il segno dei coefficienti: il primo e il secondo coefficiente sono indipendenti da *k* e sempre positivi; il terzo è positivo per $k<9$
Completa il grafico che riassume la situazione reciproca del segno del discriminante e dei tre coefficienti e trai le conclusioni relativamente alla soluzione del problema posto.

258 Due numeri reali hanno come somma *a* $(a\in\mathbb{R}_0)$; determinare i due numeri in modo che il loro prodotto sia *k* $(k\in\mathbb{R}_0)$. Quale condizione si deve porre sull'incognita? Per quale valore del parametro i due numeri soluzione sono uguali?

259 In un triangolo rettangolo l'altezza *AH* relativa all'ipotenusa *BC* misura *1m* e $A\hat{B}C=60°$. Determinare sulla semiretta *AH*, esternamente al triangolo un punto *P* in modo che sia *k* la somma dei quadrati delle distanze di *P* dai vertici del triangolo. Quale condizione va imposta al parametro *k* perché il problema abbia significato?

260 $\overline{AB}=16a;\ \overline{BC}=2a\sqrt{14}$ rappresentano le misure dei lati del rettangolo *ABCD*; determinare un punto *P* del segmento *AB* tale che la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici *C* e *D* sia uguale al quadrato della diagonale *DB*. Posto $\overline{AP}=x$ quale delle seguenti condizioni deve rispettare la soluzione?
$A]\ x>0;\quad B]\ 0<x<16a;\quad C]\ x<16a$
Dopo aver risolto il problema spiegate il significato delle soluzioni ottenute.

261 Nel trapezio rettangolo ABCD di base maggiore BC, la diagonale AC è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}D$.
Posto $\overline{AB}=1(\text{m})$, determina la base maggiore in modo che sia 2k il perimetro del trapezio.
Completa la figura, i dati e l'obiettivo del problema.
Traccia dello svolgimento
Ricordiamo che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente congruenti, allora sono simili e i lati omologhi (opposti agli angoli congruenti) sono i termini di una proporzione.

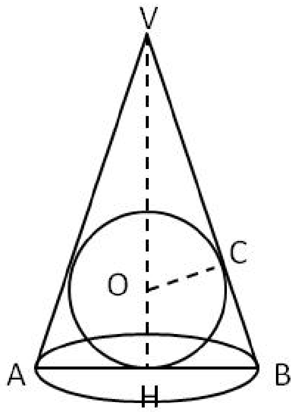
- dalla richiesta del problema poniamo $\overline{BC}=x$ con x……… ;
- dall'informazione “la diagonale *AC* è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}D$ ”, possiamo dimostrare che

ADC è un triangolo isoscele sulla base AC; infatti … … … … … … … … … … … … … … …

- l'equazione risolvente sarà determinata dalla relazione tra i lati che esprime il perimetro del trapezio: $2p=\overline{AC}+\overline{BC}+\ldots\ldots\ldots\ldots=2k$
- dobbiamo quindi esprimere $\overline{DC}$ in funzione di x
- Tracciamo l'altezza *DH* del triangolo isoscele *ADC* e dopo aver dimostrato la similitudine di *ABC* con *DHC*, verifica che si ottiene: $\frac{1}{2}\overline{AC}^2=\overline{DC}\cdot\overline{BC}$ da cui potete ricavare $\overline{DC}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Per completare gli elementi nell'equazione risolvente, calcoliamo $\overline{AC}^2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo *ABC*

L'equazione parametrica risolvente ottenuta $2x^2+x\cdot(1-2k)+1=0$ con $x>0$ può essere discussa con il metodo di Cartesio.

262 Ad una sfera di raggio *1m* è circoscritto un cono il cui volume è *k* volte il volume della sfera. Determina l'altezza del cono.

Dati	Obiettivo	Figura
$\overline{OC}=1$ $\overline{OC}=\overline{OH}$ $\overline{OC}\perp\overline{VB}$ $\overline{BC}=\overline{BH}$ $\overline{AH}=\overline{HB}$ $\overline{VH}\perp\overline{AB}$ $Volume_{cono}=k\cdot Volume_{sfera}$	$?\ \overline{VH}$	

Poniamo $\overline{VO}=x$ con $x>0$ da cui $\overline{VH}=\overline{VO}+\overline{OH}=x+1$

Ricordiamo che $V_{cono}=\frac{1}{3}\pi\,\overline{HB}^2\cdot\overline{VH}$ e $V_{sfera}=\frac{4}{3}\pi\,\overline{CO}^3$, quindi per impostare l'equazione risolvente dobbiamo cercare di esprimere $\overline{HB}^2$ in funzione di *x*.

Verifica che dalla similitudine [ricordiamo che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente congruenti, allora sono simili e i lati omologhi, opposti agli angoli congruenti, sono in proporzione] di *VOC* con *VHB* si deduce: $\overline{HB}:\overline{OC}=\overline{VH}:\overline{VC}$ quindi $\overline{HB}=\frac{\overline{OC}\cdot\overline{VH}}{\overline{VC}}$; dobbiamo ancora ricavare $\overline{VC}$ che per il teorema di Pitagora su *VCO* è $\overline{VC}=\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

Sostituendo tutti gli elementi trovati nella relazione che lega il volume del cono con il volume della sfera, verifica che si ottiene $x^2+2x(1-2k)+4k=0$ con $x>0$, da discutere con il metodo di Cartesio.

263 Il quadrilatero *ABCD* ha le diagonali perpendicolari ed è inscritto in una circonferenza; sapendo che $\overline{AB}=5a$; $\overline{AE}=3a$; $2p_{BCA}=\frac{5}{2}\cdot\overline{BD}$, essendo *E* punto d'incontro delle diagonali, determinate la misura delle diagonali. [Poni $\overline{CE}=x$, analizza la posizione del punto *E* sulla diagonale *BD*.]

264 Il rettangolo *ABCD* ha i lati *AB* e *BC* che misurano rispettivamente *a* e *3a* (*a>0*). Prolunga il lato *AB* di due segmenti congruenti *BN* e *AM* e sia *V* il punto di intersezione delle retta *MD* e *CN*. Posto $\overline{BN}=x$, determina la misura della base *MN* del triangolo *MVN* in modo che la sua area sia *k* volte l'area del rettangolo assegnato.

265 Indica la risposta corretta

1. L'equazione $25x^2+1=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm 5$ [B] $x=\pm\frac{1}{5}$ [C] x=-5 e x=0 [D] non ha soluzioni reali

2. L'equazione $16x^2+x=0$ ha per soluzioni
[A] $x=4 \vee x=1$ [B] $x=\pm\frac{1}{4}$ [C] $x=-\frac{1}{16}\vee x=0$ [D] non ha soluzioni reali

3. L'equazione $4x^2-9x=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm\frac{3}{2}$ [B] $x=\pm\frac{9}{4}$ [C] $x=\frac{3}{2}\vee x=0$ [D] $x=\frac{9}{4}\vee x=0$

4. L'equazione $9x^2+6x+1=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm 3$ [B] $x=\pm\frac{1}{3}$ [C] $x=-\frac{1}{3}$ doppia [D] non ha soluzioni reali

5. L'equazione $x^2-6x+36=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm 6$ [B] $x=\pm\sqrt{6}$ [C] $x=6$ doppia [D] non ha soluzioni reali

6. Quale di queste equazioni ammette una soluzione doppia x=3?
[A] $x^2+6x+9=0$ [B] $9-x^2=0$ [C] $2x^2-12x+18=0$ [D] $3x^2+9x=0$

7. Le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono $x_1=1$ e $x_2=3$. L'equazione è pertanto:
[A] $x^2+x-1=0$ [B] $x^2-4x+3=0$ [C] $x^2-4x-3=0$ [D] nessuna delle risposte precedenti

8. Il polinomio x^2+5x+6 può essere scomposto in:
[A] $(x+2)(x-3)$ [B] $(x+5)(x+1)$ [C] $(x-2)(x-3)$ [D] nessuna delle risposte precedenti

9. Una delle soluzioni dell'equazione $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$ è $\sqrt{2}$, quanto vale l'altra?
[A] $-\sqrt{2}$ [B] $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [C] $\sqrt{2}+1$ [D] 1

10. Per quale valore di *k* l'equazione $(2k-1)x^2+(2k+1)x+k-2=0$ diventa di I grado?
[A] $k=\frac{1}{2}$ [B] $k=-\frac{1}{2}$ [C] $k=2$ [D] $k=0$

11. L'equazione $4m^2x^2-5mx+1=0$ con parametro *m* ha per soluzioni
[A] $x=m\vee x=4m$ [B] $x=\frac{1}{m}\vee x=\frac{1}{4m}$ [C] $x=64m\vee x=1$ [D] $x=m\vee x=\frac{1}{4}$

12. L'equazione di secondo grado $x^2+(a+1)x+a=0$ con *a* parametro reale ha come soluzioni:
[A] $x=1\vee x=a$ [B] $x=a-1\vee x=1$ [C] $x=-a\vee x=-1$ [D] nessuna delle risposte precedenti

13. L'equazione $x^2+(t-2)=0$ con *t* parametro reale ammette soluzioni reali
[A] per $t\le 2$ [B] per $t\ge 2$ [C] per $t<2$ [D] nessuna delle risposte precedenti

14. Quanto vale il prodotto delle soluzioni dell'equazione $x^2-6a^2x+8a^4=0$?
[A] $8a^4$ [B] $8a^2$ [C] $6a^2$ [D] non esiste

15. Il polinomio $x^2+(m-2)x-2m$ con *m* parametro reale può essere scomposto in:
[A] $(x+m)(x+1)$ [B] $(x+m)(x-2)$ [C] $(x+m)(x+2)$ [D] nessuna delle risposte precedenti

16. L'equazione $x^2+(k-1)x=0$ con *k* parametro reale:
[A] non ha soluzioni reali [B] ha una soluzione uguale a zero
[C] ha due soluzioni reali coincidenti per k=0 [D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

17. L'equazione $x^2+2x+k-2=0$ con *k* parametro reale:
[A] ha due soluzioni reali coincidenti per k=3 [B] ha due soluzioni reali coincidenti per k=1
[C] ha una soluzione nulla per k=-2 [D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

18. L'equazione $x^2+m^2+1=0$ con *m* parametro reale:
[A] ammette due soluzioni reali e opposte [B] ammette due soluzioni coincidenti
[C] non ammette soluzioni reali [D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

19. L'equazione $2x^2+k^2=0$ con *k* parametro reale:
[A] ammette due soluzioni reali e distinte [B] ammette due soluzioni reali solo se *k* è positivo
[C] ammette soluzioni coincidenti per *k=0* [D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

20. L'equazione $tx^2-1=0$
[A] ha come soluzioni $x_1=0$ e $x_2=1-t$ [B] ammette sempre soluzioni reali
[C] ammette soluzioni reali per t>0 [D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

1.D-2.C-3.D-4.C-5.D-6.A-7.B-8.D-9.D-10.A-11.B-12.C-13.A-14.A-15.B-16.B-17.A-18.C-19.C-20.C

Autori

Erasmo Modica: teoria, esercizi
Cristina Mocchetti: teoria, esercizi
Francesco Daddi: esercizi
Germano Pettarin: esercizi
Pierluigi Cunti: esercizi
Lisa Maccari: esercizi
Gemma Fiorito: correzioni
Sara Gobbato: integrazioni
Eugenio Medaglia: suggerimenti
Luciano Sarra: correzioni
Claudio Carboncini: coordinamento, trascrizione
Antonio Bernardo: coordinatore

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 1.6 del 05.02.2011