RADICALI

Definizione: Un **numero irrazionale** è un numero decimale illimitato non periodico.

Esempio: $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, π

Per calcolare il valore approssimato di un'espressione contenente radici conviene manipolare l'espressione per ridurre al massimo il numero di radici; a questo punto si sostituisce il valore approssimato delle radici rimaste, quindi si calcola il valore approssimato dell'intera espressione.

Le **radici quadrate** di un numero *a* sono tutti i numeri che, elevati al quadrato, danno come risultato il numero *a*.

Esempio: Le radici quadrate del numero 9 sono +3 e -3.

Con il simbolo $\sqrt{9}$ si indica la radice positiva, 3.

Si avrà, quindi, che

- la $\sqrt{a}$ è definita per $a \geq 0$;
- $\sqrt{a} \geq 0$
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

La **radice cubica** di un numero $a \in R$ è quel numero che, elevato alla terza, da' *a*.

Si avrà quindi $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a, \quad \forall a \in R$.

Le **radici n-esime** di un numero $a \in R$ sono quei numeri che, elevati ad *n*, danno *a*.

$n \in N - \{0\}$ è detto **indice** della radice,

a è detto **radicando**

- Se *n* è pari, la radice n-esima di *a* $\sqrt[n]{a}$ è definita solo per $a \geq 0$; la radice n-esima di *a* ha due valori reali: $+\sqrt[n]{a}$ e $-\sqrt[n]{a}$. La $\sqrt[n]{a}$ indica il valore assoluto della radice.
- Se *n* è dispari, la radice n-esima di *a* $\sqrt[n]{a}$ è definita per ogni *a* appartenente ad *R* ($a \in R$). La $\sqrt[n]{a}$ ha un solo valore.

La radice n-esima è anche detta **radicale** n-esimo.

LE POTENZE AD ESPONENTE RAZIONALE

Considero $\sqrt{a}$: so che $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Voglio esprimere $\sqrt{a}$ come potenza di *a*, cioè

$$\sqrt{a} = a^x .$$

Elevo tutto al quadrato:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(a^x\right)^2$$

$$a = a^{2x}$$

Eguaglio gli esponenti:

$$1 = 2x$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Quindi posso concludere che

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \forall a \in R, \quad a \geq 0$$

In generale

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \text{e} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Si dice potenza ad esponente razionale di un numero $a \in R$, con $a \geq 0$,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m ,$$

con $m \in Z, \quad n \in Z, \quad n \neq 0$

PROPRIETA' INVARIANTIVA DEI RADICALI

Moltiplicando o dividendo per uno stesso numero naturale diverso da zero l'indice di un radicale e l'esponente del suo radicando si ottiene un radicale equivalente a quello di partenza.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}, \qquad \text{con} \quad a \geq 0, \quad n, m, p \in N - \{0\}$$

La proprietà invariantiva viene usata:

- per ridurre due radicali allo stesso indice, quando si moltiplicano *n* ed *m* per uno stesso numero
- per semplificare un radicale, quando si dividono *n* ed *m* per uno stesso numero.

RIDUZIONE DI RADICALI ALLO STESSO INDICE

Esempio: Riduciamo allo stesso indice i radicali $\sqrt[12]{5}$ e $\sqrt[18]{5}$.

Come indice comune possiamo scegliere il m.c.m. tra gli indici dei radicali dati $m.c.m.(12,18) = 36$.

Utilizzando la proprietà invariantiva:

$$\sqrt[12]{5} = \sqrt[12\cdot 3]{5^{1\cdot 3}} = \sqrt[36]{125} \qquad \sqrt[18]{5} = \sqrt[18\cdot 2]{5^{1\cdot 2}} = \sqrt[36]{25}$$

La riduzione di radicali allo stesso indice è utile per effettuare alcune moltiplicazioni e divisioni tra radicali e per confrontare radicali con indici diversi.

Esempio: Confrontiamo i radicali $\sqrt[3]{4}$ e $\sqrt[4]{5}$.

Riduciamo i due radicali allo stesso indice; come indice comune scegliamo il $m.c.m.(3,4) = 12$.

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3\cdot 4]{4^{1\cdot 4}} = \sqrt[12]{256} \qquad \sqrt[4]{5} = \sqrt[4\cdot 3]{5^{1\cdot 3}} = \sqrt[12]{125}$$

Dato che $256 > 125$ possiamo concludere che $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$.

SEMPLIFICAZIONE DI RADICALI

In generale si può cercare di semplificare un radicale scomponendo in fattori primi il radicando e dividendo, se possibile, sia l'indice della radice, sia l'esponente del radicando per un fattore comune.

Esempio: Semplifichiamo $\sqrt[9]{64}$.

Scomponiamo in fattori primi il radicando: $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6}$

Dividiamo l'indice della radice 9 e l'esponente del radicando 6 per un divisore comune, ad esempio il $M.C.D.(9,6) = 3$: $\sqrt[9]{2^6} = \sqrt[9:3]{2^{6:3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

OPERAZIONI FRA RADICALI

PRODOTTO E QUOZIENTE TRA RADICALI AVENTI LO STESSO INDICE

Il prodotto di radicali aventi lo stesso indice è un radicale che ha come indice lo stesso indice e come radicando il prodotto dei radicandi.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

Esempio: $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{3\cdot 6}=\sqrt[3]{18}$

Il quoziente di radicali aventi lo stesso indice è un radicale che ha come indice lo stesso indice e come radicando il quoziente dei radicandi.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Esempio: $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$

PRODOTTO E QUOZIENTE DI RADICALI CON INDICI DIVERSI

Per moltiplicare o dividere radicali aventi indici diversi bisogna prima ridurli allo stesso indice (applicando la proprietà invariantiva) e poi procedere come nel paragrafo precedente.

POTENZA DI RADICALI

La potenza di un radicale è un radicale che ha come radicando la potenza del radicando e come indice l'indice di partenza.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$

Esempio: $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$

TRASPORTO DI UN FATTORE FUORI DAL SEGNO DI RADICE

Considero il radicale $\sqrt[3]{24}$.

Fattorizzo il radicando $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}$

Scompongo il radicale ottenuto nel prodotto tra due radicali $\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3}$

Semplifico il primo radicale $2\cdot\sqrt[3]{3}$

Riassumendo $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3}=2\cdot\sqrt[3]{3}$ ho trasportato il fattore 2 fuori dal segno di radice.

In generale vale l'uguaglianza

$$\sqrt[n]{x^{kn}y}=x^k\cdot\sqrt[n]{y}\,,$$

con $n,k\in N-\{0\},\quad x\geq 0,\quad y\geq 0$

TRASPORTO DI UN FATTORE SOTTO IL SEGNO DI RADICE

E' il procedimento inverso a quello del paragrafo precedente.

Esempio: $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}$

In generale vale la seguente regola

$$x\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x^n y}\,,$$

con x ed y qualunque, se n è dispari;

$x\geq 0,\quad y\geq 0$ se n è pari

Esempi: $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$

$-2\sqrt{2}=-\sqrt{2^2\cdot 2}=-\sqrt{8}$

ADDIZIONI E SOTTRAZIONI FRA RADICALI

Due o più **radicali** si dicono **simili** quando hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

Ad esempio i radicali

$$3\sqrt[5]{8}\quad \frac{1}{2}\sqrt[5]{8}\quad -\sqrt[5]{8}\quad 100\sqrt[5]{8}$$

sono simili perché hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

E' possibile sommare o sottrarre radicali simili, utilizzando la proprietà distributiva.

Esempio: $2\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(2+4)\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

Esempio: $\sqrt{3}+\sqrt{12}=$ Apparentemente i due radicali non sono simili

$=\sqrt{3}+2\sqrt{3}=$ Estraendo il fattore 2 dalla seconda radice diventa possibile eseguire la somma

$=3\sqrt{3}$

La somma tra radicali è simile a quella tra monomi, che può essere eseguita solo se i monomi addendi sono simili tra loro.

RAZIONALIZZAZIONE DI RADICALI

Razionalizzare un'espressione significa trasformarla in una equivalente che non contenga radicali a denominatore.

Il caso più semplice di espressione da razionalizzare è quello in cui a denominatore compare solo una radice quadrata.

Per razionalizzare il denominatore si devono moltiplicare numeratore e denominatore per la radice presente a denominatore.

Esempi:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$